Probleme AA
Setul 2

1. Un semnal real, aleator, $s(n)$ este perturbat de un zgomot alb necorelat cu semnalul, $w(n)$.

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

Se cunosc:

$$r_{ss}(n) = a\alpha^{|n|}, \quad \alpha \in [0,1], \qquad a > 0, \qquad \frac{S}{Z} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} = b.$$

Calculaţi filtrul optim care estimează $s(n)$ pe baza observaţiilor $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$ şi evaluaţi eroarea medie pătratică.
Discuţie în funcţie de parametrii *a*, *b*, α. Aplicaţie numerică: $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 0{,}8$.

2. Un semnal real, aleator, $s(n)$ este perturbat de un zgomot alb necorelat cu semnalul, $w(n)$.

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

Se cunosc:

$$r_{ss}(n) = a\alpha^{|n|}, \quad \alpha \in [0,1], \qquad a > 0, \qquad \frac{S}{Z} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} = b.$$

Calculaţi filtrul optim care estimează $s(n+m)$, $m \geq 0$ pe baza observaţiilor $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$ şi evaluaţi eroarea medie pătratică.
Discuţie în funcţie de parametrii *m*, *a*, *b*, α. Aplicaţie numerică: $a = 10$, $b = 5$, $\alpha = 0{,}8$.

3. Un proces aleator poate fi descris prin relaţia:

$$x(n) = \alpha \cdot x(n-1) + w(n)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb, cu varianţa σ_w^2. Calculaţi matricea de autocorelaţie de ordinul *N*. Demonstraţi că pentru orice ordin $N \geq 1$, coeficienţii filtrului predictor optim sunt:

$$\mathbf{w_0} = [\alpha, 0, \ldots 0]^T$$

şi eroarea medie pătratică este σ_w^2.

4. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens direct, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(0) = 3$, $r_x(1) = 2$, $r_x(2) = 1$, $r_x(l) = 0$ pentru $|l| > 2$

5. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens invers, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(0) = 3$, $r_x(1) = 2$, $r_x(2) = 1$, $r_x(l) = 0$ pentru $|l| > 2$

6. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens direct, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(l) = 2 \cdot (0{,}8)^{|l|}$

7. Se doreşte estimarea unui semnal aleator $s(n)$ utilizând un filtru RFI cu $N = 2$. Observaţiile sunt de forma:

$$x(n) = s(n) - s(n-1) + w(n)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu varianţa $\sigma_w^2 = 2$, independent de semnalul $s(n)$. Semnalul se caracterizează prin $r_s(n) = 6 \cdot (0,8)^{|n|}$.
Determinaţi structura filtrului optim şi eroarea medie pătratică.

8. Determinaţi expresiile coeficienţilor filtrelor erorii de predicţie directă şi inversă şi a varianţei erorii, pentru $N = 2$, în funcţie de $r_{xx}(k) = r(k)$.

9. Fie procesul aleator staţionar definit prin:

$$r_{xx}(k) = \delta(k) + 0,9^{|k|} \cos(k\pi / 4)$$

Calculaţi predictorii în sens direct de ordinul doi cu 1, 2, 3, 4 paşi şi puterile erorilor de predicţie corespunzătoare. Comentaţi rezultatul.

10. Fie procesul aleator staţionar definit prin:

$$r_{xx}(k) = \delta(k) + 0,5^{|k|} \cos(k\pi / 4)$$

Calculaţi predictorii în sens invers de ordinul doi cu 1, 2, 3, 4 paşi şi puterile erorilor de predicţie corespunzătoare. Comentaţi rezultatul.

11. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 4w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie *P*. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+1)$ și evaluați erorile de predicție.

12. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 2w(n) - w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie *P*. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+2)$ și evaluați erorile de predicție.

13. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 4w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie *P*. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+3)$ și evaluați erorile de predicție.

14. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 2w(n) - w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie *P*. Calculați și desenați schemele unor filtre care generează o predicție de ordinul 3 pentru $x(n+1)$, $x(n+2)$ și $x(n+3)$ și evaluați erorile de predicție.

15. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^b(n) e_l^{b*}(n)\right\} = \begin{cases} 0, & r \neq l \\ P_r = P_l, & r = l \end{cases}$$

16. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^f(n+r)e_l^{f*}(n+l)\right\}=\begin{cases}0, & r\neq l\\ P_r=P_l, & r=l\end{cases}$$

17. Demonstraţi că

$$E\left\{e_r^f(n)e_l^{f*}(n)\right\}=\max\left\{P_r,P_l\right\}$$

18. Pentru un filtru adaptiv bazat pe metoda pantei descendente maxime, se cunosc:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}25\end{pmatrix}$$

- Pentru ce valori ale parametrului μ algoritmul SD este convergent?
- Alegând o valoare în acest domeniu, determinaţi relaţiile de calcul pentru $w_1(n)$ şi $w_2(n)$ pornind de la condiţii iniţiale nule.
- Studiaţi efectul variaţiei lui μ asupra traiectoriei lui $\mathbf{w}(n)$.

19. Formulaţi o metodă de gradient dacă funcţia cost este $J(n)=|e(n)|^2$.

20. (MATLAB) Un proces autoregresiv este descris prin:

$$x(n)+a_1\cdot x(n-1)=v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2. Fie următoarele seturi de valori pentru parametrii a_1 şi σ_v^2:

- $a_1=-0{,}1;\ \ \sigma_v^2=0{,}99$
- $a_1=-0{,}5;\ \ \sigma_v^2=0{,}75$
- $a_1=-0{,}8152;\ \ \sigma_v^2=0{,}3305$
- $a_1=-0{,}9802;\ \ \sigma_v^2=0{,}0392$

Procesul este aplicat unui predictor de ordinul 2, bazat pe metoda pantei descendente maxime (SD).

a) Calculaţi în fiecare caz valorile admisibile pentru μ.

b) Construiţi curbele eroare medie pătratică constantă în funcţie de $v_1(n)$ şi $v_2(n)$, pentru seturile de parametri date mai sus. Pentru aceasta suprapuneţi traiectoriile descrise prin modificarea coeficienţilor, cu *n*, presupunând $\mu=0{,}3$ şi condiţii iniţiale nule.

c) Repetaţi punctul b) în funcţie de $w_1(n)$ şi $w_2(n)$.

d) Reprezentaţi curbele de învăţare, $J(n)$, în toate cele patru cazuri, pentru: $\mu=0{,}02,\ \ \mu=0{,}05,\ \ \mu=0{,}2$. Discuţie.

21. (MATLAB) Un proces autoregresiv de ordinul 2 este descris prin:

$$x(n)+a_1\cdot x(n-1)+a_2\cdot x(n-2)=v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2.

Fie următorul set de valori:

- $a_1=-0{,}10025;\ \ a_2=0{,}0025;\ \ \sigma_v^2=0{,}99$
- $a_1=-0{,}5359;\ \ a_2=-0{,}0718;\ \ \sigma_v^2=0{,}7461$
- $a_1=-1{,}0390;\ \ a_2=0{,}2699;\ \ \sigma_v^2=0{,}3065$
- $a_1=-1{,}6364;\ \ a_2=0{,}6694;\ \ \sigma_v^2=0{,}0216$

Procesul este aplicat unui predictor liniar de ordinul 2, bazat pe metoda pantei descendente maxime (SD). Efectuaţi punctele a-d de la problema 20, în acest caz.

22. Fie funcţia de cost:

$$J(n)=|e(n)|^2+\alpha\|\mathbf{w}(n)\|^2$$

cu α constantă. În algoritmul "leaky LMS" această funcţie de cost este minimizată în raport cu coeficienţii $\mathbf{w}(n)$.

a) Arătaţi că ecuaţia de reactualizare a coeficienţilor este de forma:

$$\mathbf{w}(n+1) = (1-\mu\alpha)\mathbf{w}(n) + \mu \cdot \mathbf{x}(n) \cdot e^*(n)$$

unde $0 < \alpha < \dfrac{1}{1-\mu}$.

b) Acceptând ipotezele de independenţă, arătaţi că:

$$\lim_{n\to\infty} E\{\mathbf{w}(n)\} = (\mathbf{R} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{p}$$

Deduceţi condiţiile de convergenţă în medie.

23. (MATLAB) Fie un proces autoregresiv $x(n)$ de ordinul 1:

$$x(n) + a_1 \cdot x(n-1) = v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2. Parametrii a_1 şi σ_v^2 sunt:

- $a_1 = -0{,}8182;\ \sigma_v^2 = 0{,}3305$
- $a_1 = -0{,}9802;\ \sigma_v^2 = 0{,}0392$

Acesta este aplicat unui predictor de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului gradientului stochastic (LMS).

a) Stabiliţi domeniul valorilor lui μ pentru convergenţa în medie.

b) Stabiliţi domeniul valorilor lui μ pentru convergenţa în medie pătratică.

c) Generaţi 256 eşantioane ale procesului $x(n)$. Pentru $\mu = 0{,}05$ şi $\mu = 0{,}005$ trasaţi curbele de învăţare $J(n)$ ale algoritmului, mediind pe 200 de rulări independente ale experimentului. Estimaţi valorile dezadaptării, făcând o mediere pe ultimile 200 de iteraţii ale curbelor mediate pe ansamblu. Comparaţi cu valorile teoretice.

d) Estimaţi valorile medii ale lui $w_1(\infty)$ şi $w_2(\infty)$ (mediind pe 200 de rulări independente, ultimile valori ale lui $w_1(n)$ şi $w_2(n)$). Comparaţi cu rezultatele teoretice. Discuţie.

e) Estimaţi valoarea dezadaptării şi comparaţi cu valoarea teoretică.

24. (MATLAB) Fie un proces autoregresiv de ordinul 2, cu:

- $a_1 = -0{,}1;\ a_2 = -0{,}8;\ \sigma_v^2 = 0{,}27$
- $a_1 = -0{,}1636;\ a_2 = -0{,}8;\ \sigma_v^2 = 0{,}119$
- $a_1 = -0{,}196;\ a_2 = -0{,}8;\ \sigma_v^2 = 0{,}0111$

Acesta este aplicat unui predictor adaptiv de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului LMS. Efectuaţi toate cerinţele de la problema precedentă.

25. (MATLAB) Algoritmul "clipped" LMS, pentru date reale se defineşte prin:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \cdot e(n) \cdot sign\{\mathbf{x}(n)\}$$

Procesul autoregresiv de la problema 22 este aplicat unui predictor de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului "clipped" LMS. Efectuaţi toate cerinţele de la problema 23.

26. Demonstraţi că setul de coeficienţi $\mathbf{w}(n)$ care minimizează funcţia cost

$$J(n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} |e(i)|^2$$

unde

$$e(i) = d(i) - y(i) = d(i) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(i);$$
$$\mathbf{x}(i) = [x(i), x(i-1), \cdots, x(i-N+1)]^T$$

verifică ecuaţia normală

$$\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{w}(n)=\mathbf{\theta}(n)$$

unde

$$\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i)$$
$$\mathbf{\theta}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)d^{*}(i)$$

27. Demostrați că pentru un process aleatoriu staționar,

$$\mathbf{\Phi}(n)=k\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i)$$

reprezintă un estimator în general deplasat al matricei de autocoelație. Calculați k, astfel încât estimatorul să fie

- asimptotic nedeplasat
- nedeplasat

28. Demostrați că pentru un process aleatoriu staționar,

$$\mathbf{\theta}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)d^{*}(i)$$

reprezintă un estimator în general deplasat al vectorului corelațiilor dintre semnalul de intrare și semnalul dorit. Calculați k, astfel încât estimatorul să fie

- asimptotic nedeplasat
- nedeplasat.

29. Demonstrați că

$$\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^{H}(i)$$

este o matrice hermitică și pozitiv semidefinită.

30. Demonstraţi că în condiţiile de la problema 26, relaţiile de ortogonalitate capătă forma

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)e_{\min}^{*}(i)=\mathbf{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}y_{o}(i)e_{\min}^{*}(i)=0$$

31. Demonstraţi că în condiţiile de la problema 26, în cazul utilizării coeficienţilor optimi,

$$J_{\min}(n)=E_{d}(n)-E_{y}(n)$$

unde

$$E_{d}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|d(i)|^{2}$$
$$E_{y}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|y_{o}(i)|^{2}$$