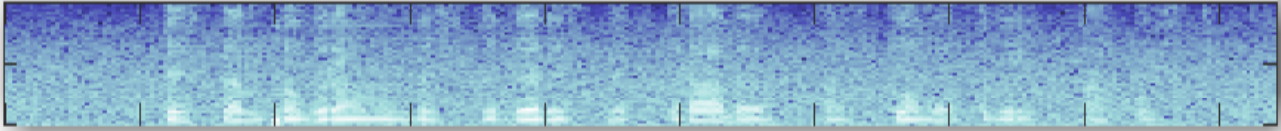


PROCESE ALEATOARE DISCRETE ÎN TIMP



1 Proprietăți generale

1.1 Medii statistice. Clasificări

- Un proces aleator discret poate fi definit ca o secvență de variabile aleatoare $x(n)$, indexată cu variabila temporală n .
- $x(n)$, poate fi caracterizat prin *funcția densitate de probabilitate*, care va fi în general o funcție de timp, $w_{x(n)}(x)$.
- Valoarea medie:

$$m_x(n) = E\{x(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{x(n)}(x) dx$$

1.1 Medii statistice. Clasificări

- Funcțiile de corelație și covarianță vor depinde de două variabile temporale,

$$r_{xy}(k, l) = E\{x(k)y^*(l)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^* w_{x(k)y(l)}(x, y) dx dy$$

$$c_{xy}(k, l) = E\{(x(k) - m_x(k))(y(l) - m_y(l))^*\} = r_{xy}(k, l) - m_x(k)m_y^*(l)$$

- $x(k)$ și $y(l)$ sunt două variabile aleatoare *statistic independente* dacă:

$$w_{x(k)y(l)}(x, y) = w_{x(k)}(x)w_{y(l)}(y)$$

$$\Rightarrow r_{xy}(k, l) = m_x(k)m_y^*(l) \quad \Rightarrow \quad c_{xy}(k, l) = 0$$

1.1 Medii statistice. Clasificări

- $x(k)$ și $y(l)$ sunt *necorelate* dacă

$$c_{xy}(k, l) = 0$$

- $x(k)$ și $y(l)$ *statistic independente*
 $\Rightarrow x(k)$ și $y(l)$ *necorelate*.

- Reciproca nu este în general adevărată.
Ea are totuși loc în cazul proceselor gaussiene, unde cele două noțiuni sunt echivalente.

- $x(k)$ și $y(l)$ sunt *ortogonale*, dacă

$$r_{xy}(k, l) = E\{x(k)y^*(l)\} = 0$$

1.1 Medii statistice. Clasificări

- În cazul particular $x=y$, se obțin *funcțiile de autocorelație*

$$r_{xx}(k, l) = E\{x(k)x^*(l)\}$$

- și *autocovarianța*,

$$\begin{aligned}c_{xx}(k, l) &= E\{(x(k) - m_x(k))(x(l) - m_x(l))^*\} = \\ &= r_{xx}(k, l) - m_x(k)m_x^*(l)\end{aligned}$$

1.1 Medii statistice. Clasificări

- Se poate ușor demonstra că:
 - Dacă $x(k)$ și $y(l)$ sunt variabile aleatoare ortogonale, funcția de autocorelație a sumei este egală cu suma funcțiilor de autocorelație,

$$r_{x+y, x+y}(k, l) = r_{xx}(k, l) + r_{yy}(k, l)$$

- Dacă $x(k)$ și $y(l)$ sunt variabile aleatoare necorelate, autocovarianța sumei este egală cu suma autocovarianțelor,

$$c_{x+y, x+y}(k, l) = c_{xx}(k, l) + c_{yy}(k, l)$$

Proces aleator staționar

- Dacă proprietățile statistice sunt independente de timp se zice că procesul este staționar.
- Dacă densitatea de probabilitate de ordinul 1,
 $w_{x(n)}(x) = w_x(x)$ nu depinde de n ,
 \Rightarrow media $m_x(n) = m_x$ nu depinde de n .
- Se spune în acest caz că procesul este *staționar de ordinul 1* sau *staționar în medie*.

Proces aleator staționar

- Dacă densitatea de probabilitate de ordinul 2, satisface condiția

$$w_{x(k)x(l)}(x_1, x_2) = w_{x(k+n)x(l+n)}(x_1, x_2)$$

pentru orice n întreg, se spune că procesul este *staționar de ordinul doi*.

- În acest caz funcția de autocorelație va fi

$$r_{xx}(k, l) = r_{xx}(k+n, l+n) \quad (\forall) n \in \mathbb{Z}$$



Proces aleator staționar

- sau luând $n = -l$,

$$r_{xx}(k, l) = r_{xx}(k - l, 0) = r_{xx}(k - l)$$

- deci funcția de autocorelație depinde numai de diferența momentelor de timp $k-l$.
- În fine, dacă proprietatea de mai sus poate fi extinsă pentru densitățile de probabilitate de orice ordin, se spune că procesul este *staționar în sens strict*.



Proces aleator staționar

- Proces aleator *staționar în sens larg*:
 - $m_x(n) = m_x$, constant;
 - $r_{xx}(k, l) = r_{xx}(k - l)$, depinde numai de diferența momentelor de timp;
 - $c_{xx}(0) < \infty$, (este finit).
- Deoarece condițiile acestea se pun numai asupra momentelor, ele sunt mai slabe decât cele impuse asupra densităților de probabilitate.

Proprietăți ale funcțiilor de corelație pentru procese aleatoare staționare în sens larg

$$r_{xy}(k) = E\{x(n+k)y^*(n)\} = E\{x(n)y^*(n-k)\}$$

$$r_{xx}(k) = E\{x(n+k)x^*(n)\} = E\{x(n)x^*(n-k)\}$$

$$r_{yx}(k) = E\{y(n+k)x^*(n)\} = E\{x(n)y^*(n+k)\}^* = r_{xy}^*(-k)$$

- În particular

$$r_{xx}(k) = r_{xx}^*(-k)$$

- deci secvența de autocorelație este conjugat simetrică.

Proprietăți ale funcțiilor de corelație pentru procese aleatoare staționare în sens larg

- Având în vedere că

$$c_{xy}(k) = r_{xy}(k) - m_x m_y^*$$

- rezultă de asemenea

$$c_{yx}(k) = c_{xy}^*(-k)$$

- deci, în particular, și funcția de autocovarianță este conjugat simetrică, și

$$c_{xx}(k) = r_{xx}(k) - |m_x|^2$$

Proprietăți ale funcțiilor de corelație pentru procese aleatoare staționare în sens larg

- Valoarea din origine a funcției de autocorelație,

$$r_{xx}(0) = E\{|x(n)|^2\}$$

- reprezintă *valoarea medie pătratică* a procesului aleator $x(n)$. Se poate demonstra că *modulul funcției de autocorelație își atinge maximumul în origine*,

$$|r_{xx}(n)| < r_{xx}(0), \quad n \neq 0$$

- Valoarea în origine a funcției de autocovarianță este numită *varianță*

$$\text{var}\{x\} = c_{xx}(0) = \sigma_x^2 = r_{xx}(0) - |m_x|^2$$

- unde σ_x este *dispersia*.

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Se pune problema de a estima valorile medii statistice pornind de la cunoașterea eșantioanelor succesive ale unei singure realizări particulare a procesului aleator.
- Dacă se cunosc $2N+1$ eșantioane ale unei realizări particulare, se poate evalua *media aritmetică* a acestora,

$$\hat{m}_x(N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

- Cantitatea de mai sus tinde către media statistică $E\{x(n)\}$, atunci când N crește?

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Problema are sens numai dacă procesul este staționar în medie (deci dacă media statistică este constantă).
- Se spune că $\hat{m}_x(N)$ tinde către m_x în medie pătratică dacă

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{|\hat{m}_x(N) - m_x|^2\right\} = 0$$

- Un proces care satisface relația de mai sus se zice că este *ergodic în medie* și vom scrie că:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{m}_x(N) = m_x = E\{x(n)\}$$

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- O condiție necesară și suficientă pentru ca un proces staționar în sens larg să fie ergodic în medie este

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N c_{xx}(n) = 0$$

- Ideea de estimare temporală se poate extinde și asupra altor medii.

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Pentru funcția de autocorelație

$$y_k(n) = x(n+k)x^*(n)$$

$$\hat{r}_{xx}(k, N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y_k(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n)$$

- Dacă acesta converge în medie pătratică spre $r_x(k)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left| \hat{r}_{xx}(k, N) - r_{xx}(k) \right|^2 \right\} = 0$$

- se spune că procesul este *ergodic în autocorelație* și se scrie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{r}_{xx}(k, N) = r_{xx}(k)$$

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Pentru un asemenea proces putem scrie:

$$\begin{aligned} r_{xx}(0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \end{aligned}$$

- Această expresie reprezintă însă *puterea medie a semnalului*, deci:

- *Funcția de autocorelație evaluată în origine este egală cu puterea medie a semnalului.*

- Relația:

$$r_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2$$

1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Vom accepta în general faptul că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{xx}(n) = 0$$

- Aceasta corespunde ipotezei naturale că două eșantioane luate la momente de timp foarte depărtate devin practic necorelate. Se poate demonstra că această condiție are drept urmare faptul că procesul aleator este ergodic în medie.

1.3 Proprietăți spectrale

- Vom introduce transformata Z a funcției de autocorelație.

$$Z\{r_{xx}(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n)z^{-n} \triangleq P_{xx}(z)$$

$$r_{xx}(n) = Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_{xx}(z)z^{n-1} dz$$

- unde C este un cerc inclus în domeniul de convergență al lui $P_{xx}(z)$.
- S-a văzut că $r_{xx}(n) = r_{xx}^*(-n)$, astfel încât :

$$P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}^*(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}^*(n)z^n = P_{xx}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

1.3 Proprietăți spectrale

- În cazul unui semnal real,

$$P_{xx}(z) = P_{xx}(z^{-1})$$

- În consecință, domeniul de convergență este de forma $R_- < |z| < R_+$, cu $R_+ = 1/R_-$.
- Aceasta înseamnă că dacă domeniul de convergență este nevid, $R_- < 1, R_+ > 1$, deci cercul $|z| = 1$ este inclus în domeniul de convergență.

6.1.3 Proprietăți spectrale

- Trecând deci pe cercul $z = e^{j\omega}$, se obțin *relațiile Wiener-Hincin*:

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \text{TFTDI} \{ P_{xx}(e^{j\omega}) \} (n)$$

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) e^{-jn\omega} = \text{TFTD} \{ r_{xx}(n) \} (\omega)$$

6.1.3 Proprietăți spectrale

- Pentru $n=0$,

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

- relație ce justifică numele de densitate spectrală de putere dat funcției $P_{xx}(e^{j\omega})$ deoarece

$$c_{xx}(0) = r_{xx}(0) = E\{|x(n)|^2\}$$

- reprezintă puterea medie a semnalului.

1.3 Proprietăți spectrale

- **În concluzie:**

- Secvența de autocorelație și funcția densitate spectrală de putere reprezintă o pereche de transformate Fourier.
- Această proprietate se extinde și asupra funcției de autocovarianță pentru semnale cu valoare medie nulă. Acesta este și motivul pentru care în multe lucrări se întâlnește afirmația că funcția de autocovarianță și densitatea spectrală de putere formează o pereche de transformate Fourier.



1.3 Proprietăți spectrale

- Se remarcă însă că dacă valoarea medie nu este nulă, transformata Z a funcției de autocorelație are domeniul de convergență vid, iar transformata Fourier conține un impuls delta în origine.
- Funcția densitate spectrală de putere este o funcție reală de ω . În plus, rezultă că densitatea spectrală de putere a unui semnal real este o funcție pară de ω . Se poate de asemenea demonstra că această funcție este nenegativă,

$$P_{xx}(e^{j\omega}) \geq 0$$



1.3 Proprietăți spectrale

- Prin extensie se pot defini densitățile de putere de interacțiune, ca transformate ale funcțiilor de intercorelație:

$$P_{xy}(z) = Z\{r_{xy}(n)\}(z)$$
$$P_{xy}(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{r_{xy}(n)\}(\omega)$$

Aplicatie

- Fie un proces aleator staționar discret caracterizat prin

$$E\{x(n)\} = 0, \quad r_{xx}(k) = \alpha^{|k|}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Să evaluăm și să reprezentăm, ca funcție de ω , densitatea spectrală de putere.

$$\begin{aligned} P_{xx}(z) &= Z\{r_{xx}(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\alpha z)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha z)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k \end{aligned}$$

Aplicatie

- Prima din cele doua progresii geometrice este convergentă dacă:

$$|\alpha z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < \frac{1}{\alpha}$$

- iar a doua, dacă:

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > \alpha$$

- Rezultă domeniul comun de convergență,

$$\alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

- nevid dacă $0 < \alpha < 1$.

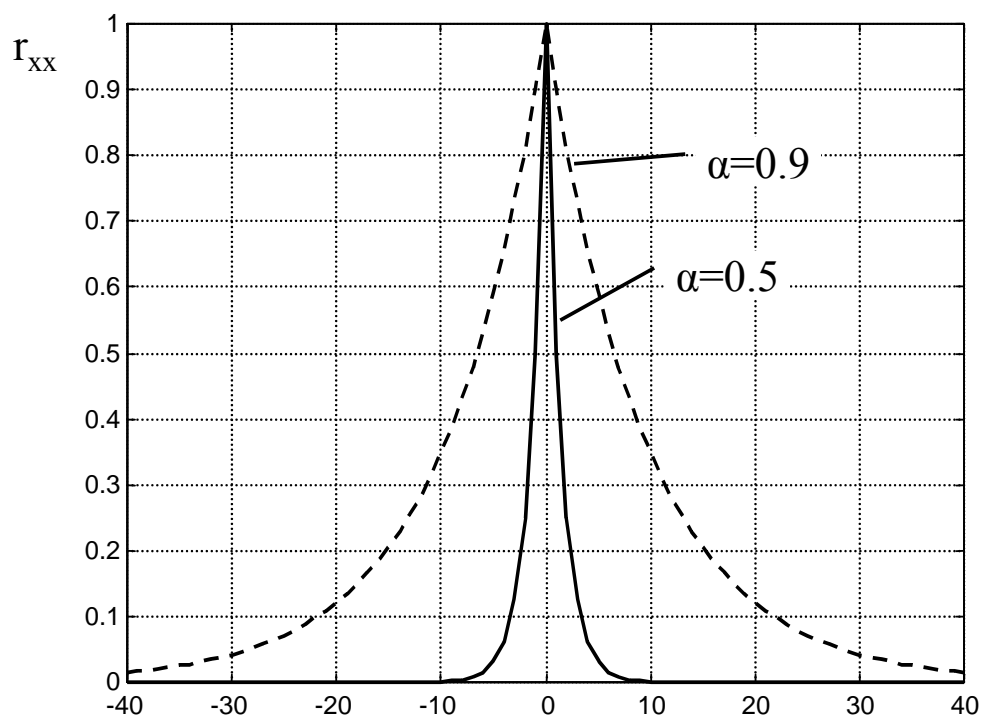
Aplicatie

$$P_{xx}(z) = \alpha z \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}$$

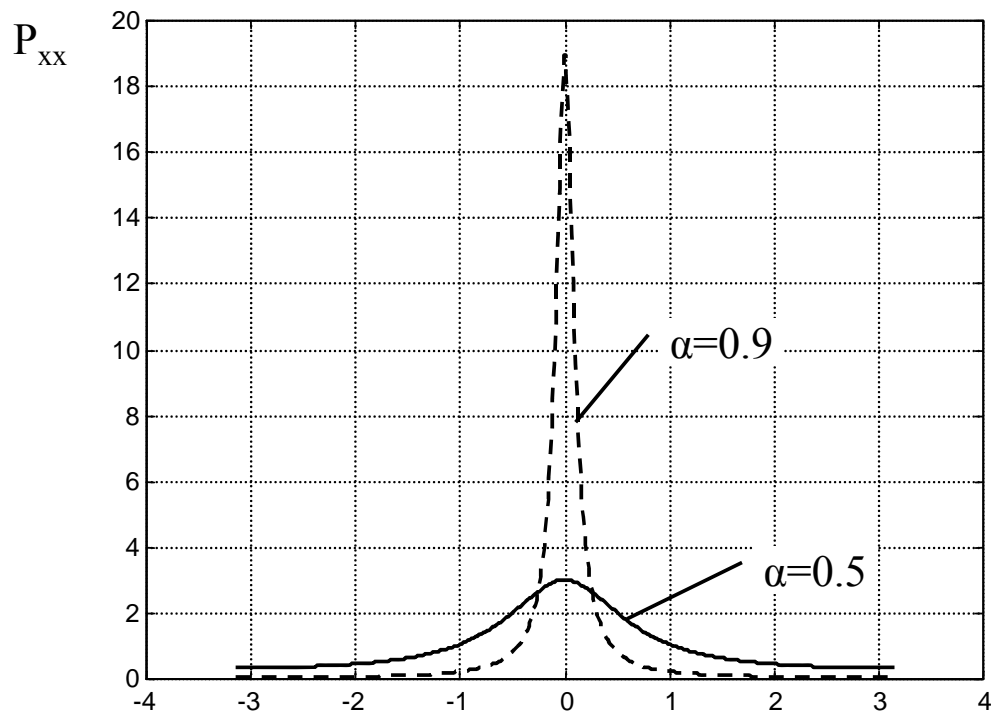
- Deoarece domeniul de convergență include cercul $|z|=1$, are sens

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha e^{j\omega})(1-\alpha e^{-j\omega})} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha \cos \omega}$$

Aplicatie



Aplicatie



2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Fie $x(n)$ un proces aleator staționar în sens larg aplicat unui sistem liniar, invariant în timp, cu funcția de pondere $h(n)$ și ieșirea sistemului, $y(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = x(n) * h(n)$$

- *Valoarea medie a semnalului la ieșire*

$$E\{y(n)\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E\{x(n-k)\} =$$

$$= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x H(e^{j0})$$

2. Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Funcția de corelație între semnalele de la ieșire și intrare*

$$\begin{aligned} r_{yx}(k) &= E\{y(n+k)x^*(n)\} = E\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n+k-l)x^*(n)\right\} = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)E\{x(n+k-l)x^*(n)\} \end{aligned}$$

$$r_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)r_{xx}(k-l) = r_{xx}(k) * h(k)$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Funcția de autocorelație a ieșirii*

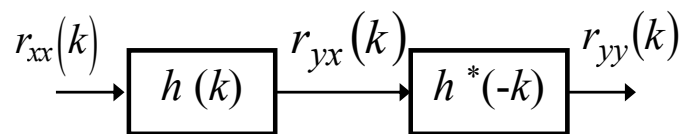
$$\begin{aligned} r_{yy}(k) &= E\{y(n+k)y^*(n)\} = E\left\{y(n+k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*(l)h^*(n-l)\right\} = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(n-l)E\{y(n+k)x^*(l)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(-l)r_{yx}(k-l) \end{aligned}$$

$$r_{yy} = r_{yx}(k) * h^*(-k)$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Ținând seama de expresia obținută pentru funcția $r_{yx}(k)$ rezultă

$$r_{yy}(k) = r_{xx}(k) * h(k) * h^*(-k)$$



2. Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Densitatea spectrală de putere a semnalului de ieșire*
- Vom presupune în cele ce urmează că semnalul de intrare are valoare medie nulă, deci

$$Z\{r_{xx}(k)\} = P_{xx}(z); \quad Z\{r_{yy}(k)\} = P_{yy}(z)$$

- și

$$H(z) = Z\{h(n)\}$$

- Rezultă imediat

$$Z\{h^*(-n)\} = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- deci având în vedere expresia obținută mai înainte pentru $r_{yy}(k) = r_{xx}(k) * h(k) * h^*(-k)$ și teorema convoluției,

$$P_{yy}(z) = P_{xx}(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

- sau, în frecvență:

$$P_{yy}(e^{j\omega}) = P_{xx}(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Puterea medie a semnalului la ieșire.*
- Presupunând în continuare valoarea medie a semnalului nulă,

$$\begin{aligned} r_{yy}(0) = c_{yy}(0) = \sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(e^{j\omega}) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Utilizând transformate Z,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_{yy}(z) z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_{xx}(z) H(z) H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) z^{-1} dz,$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

- În cazul unui sistem cu funcție de pondere reală, rămâne:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_{xx}(z) H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz,$$

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- O exprimare temporală se obține pornind de la $r_{yy} = r_{yx}(k) * h^*(-k)$ care pentru $k=0$ conduce la

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(l) r_{yx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(l) r_{xx}(l-m) h(m)$$

- deci $\sigma_y^2 = E\{|y(n)|^2\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}$
- unde \mathbf{h} este vectorul coloană format cu elementele $h(n)$, iar \mathbf{R} este matricea de autocorelație.
- Această exprimare prezintă interes în special în cazul filtrelor cu răspuns finit la impuls, când dimensiunile lui \mathbf{h} și \mathbf{R} sunt finite.

2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Aplicație în cazul unui zgomot alb cu valoare medie nulă $m_x=0$ și varianță (putere medie) σ_x^2 ;*

$$r_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \qquad P_{xx}(z) = \sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi j} \sigma_x^2 \oint_C H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi} \sigma_x^2 \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$