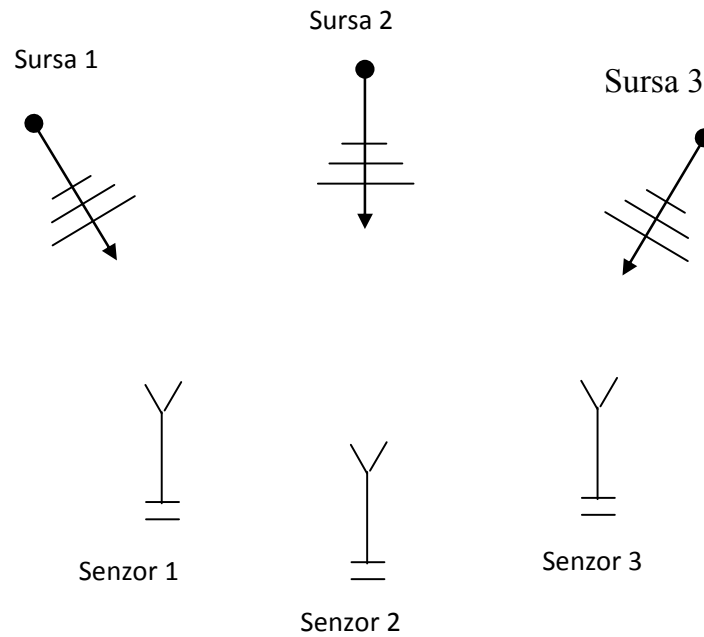


Metode spațiale
Problema determinării direcției de incidență

Ne punem problema localizării unui număr P de surse radiante, utilizând un număr N de senzori. Aplicații: radar, sonar, comunicații, astrofizică, seismologie. Sensorii pot fi: antene, hidrofoare, seismometre.



Ipoteze simplificatoare:

- Sursele sunt la distanțe mari de senzori (unde plane);
- Sursele și senzorii sunt în același plan, iar sursele sunt punctiforme;
- Mediul de propagare este omogen și izotrop;
- Senzorii ariei sunt presupuși sisteme liniare invariante în timp, cu poziții și caracteristici de transfer cunoscute (aria este *calibrată*).

În aceste condiții poziția surselor este caracterizată prin unghiurile de incidență, de aceea problema se întâlnește sub denumirea DOA (Direction Of Arrival).

Modelul semnalului

Considerăm pentru început o singură sursă.

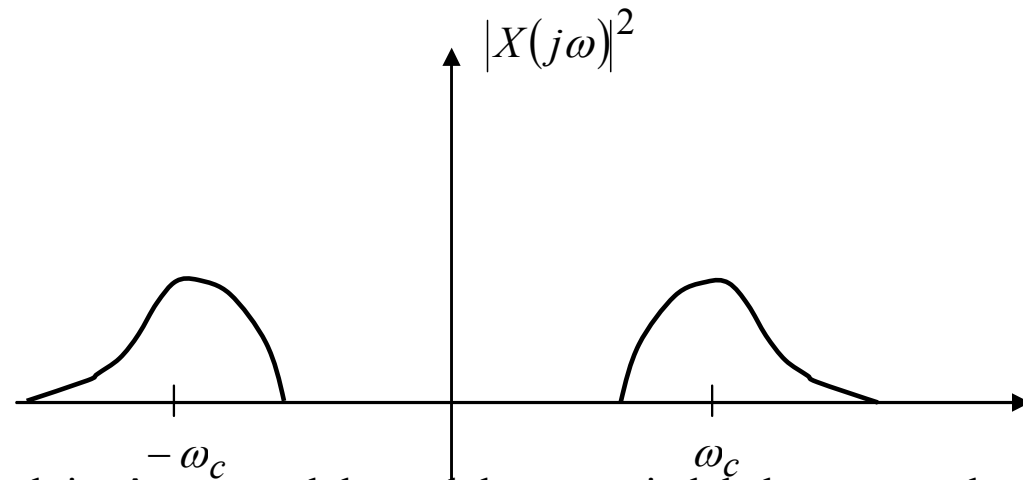
Fie $x(t)$ valoarea semnalului sosit la momentul t într-un punct de referință a sistemului (uzual unul din senzori). Notăm cu τ_k timpul necesar frontului undei pentru a ajunge din punctul de referință la senzorul k . Acest senzor va genera un semnal

$$\bar{y}_k(t) = \bar{h}_k(t) * x(t - \tau_k) + \bar{w}_k(t)$$

unde $\bar{h}_k(t)$ este funcția de pondere a senzorului k , presupusă cunoscută, iar $\bar{w}_k(t)$ este zgomotul.

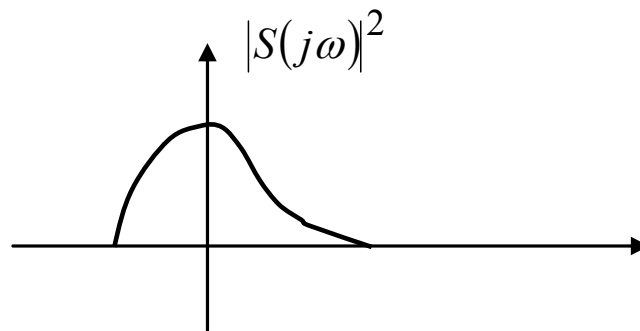
$$\bar{Y}_k(j\omega) = \bar{H}_k(j\omega)X(j\omega)e^{-j\omega\tau_k} + \bar{W}_k(j\omega)$$

Vom presupune că se lucrează cu *semnale de bandă îngustă* (semnale modulate, semnale trece bandă) cu spectrul concentrat în jurul unei frecvențe ω_c . Semnalul modulat e real, deci spectrul e simetric .



El se obține în procesul de modulare, pornind de la un semnal

În banda de bază (modulator) $s(t)$. Pentru generalitate, $s(t)$ se va considera complex



Un semnal modulat real se obține prin

$$x(t) = s(t)e^{j\omega_c t} + s^*(t)e^{-j\omega_c t} \xleftrightarrow{F} S(j(\omega - \omega_c)) + S^*(-j(\omega + \omega_c))$$

În acest caz, notând

$$s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

procesul de bandă îngustă se poate reprezenta cu ajutorul amplitudinii și a fazei

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ s(t)e^{j\omega_c t} \right\} = 2A(t)\cos(\omega_c t + \varphi(t))$$

sau cu componentele în fază și în cuadratură

$$x(t) = 2[s_I(t)\cos(\omega_c t) - s_Q(t)\sin(\omega_c t)]$$

În procesul de demodulare se realizează translația în sens invers

$$x(t)e^{-j\omega_c t} \xleftrightarrow{F} S(j\omega) + S^*(-j(\omega + 2\omega_c))$$

Semnalul în banda de bază se obține printr-o filtrare cu un filtru trece-jos care elimină termenul al doilea din spectru.

Semnalul dat de senzor este

$$\bar{Y}_k(j\omega) = \bar{H}_k(j\omega) \left[S(j(\omega - \omega_c)) + S^*(-j(\omega + \omega_c)) \right] e^{-j\omega\tau_k} + \bar{W}_k(j\omega)$$

Vom nota semnalul demodulat

$$\tilde{y}_k(t) = \bar{y}_k(t)e^{-j\omega_c t}$$

$$\tilde{y}_k(t) \xleftrightarrow{F} \bar{H}_k(j(\omega + \omega_c)) \left[S(j\omega) + S^*(-j(\omega + 2\omega_c)) \right] e^{-j(\omega + \omega_c)\tau_k} + \bar{W}_k(j(\omega + \omega_c))$$

După trecerea prin filtrul trece jos

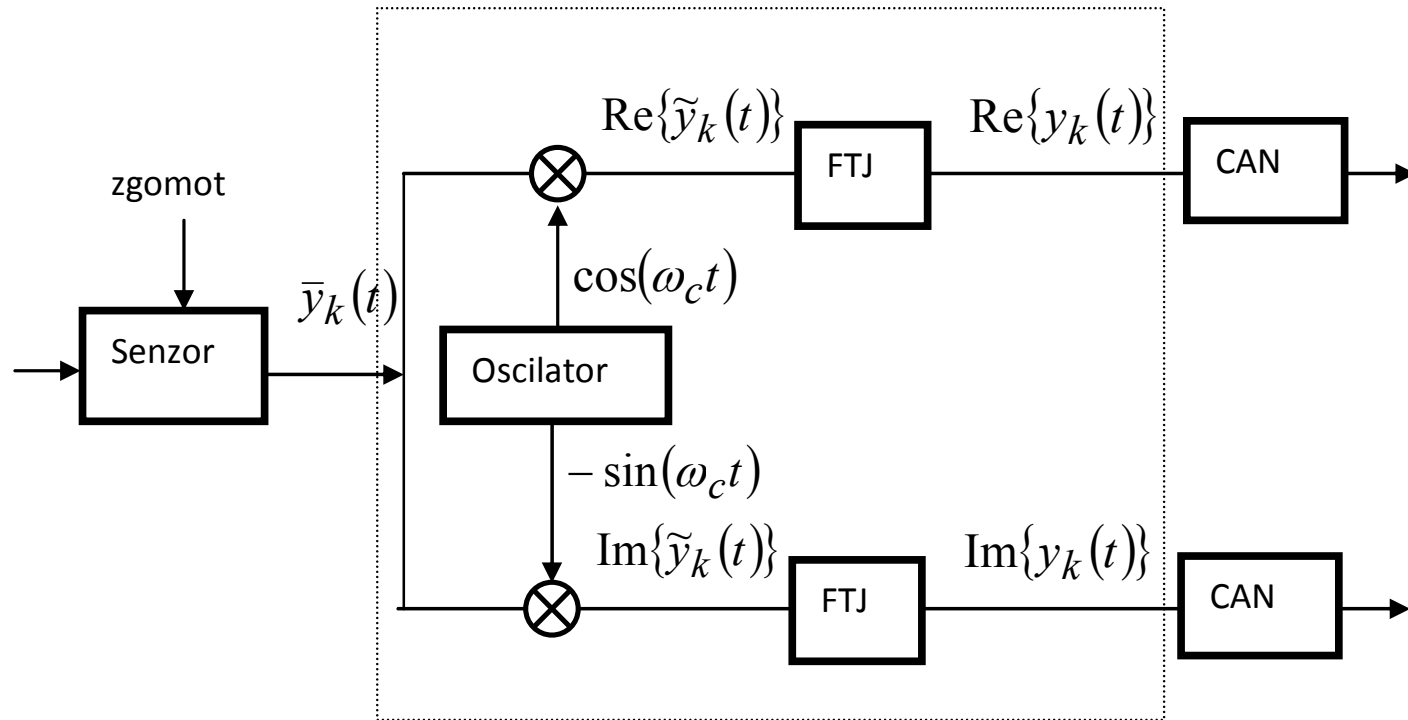
$$Y_k(j\omega) = H_k(j(\omega + \omega_c)) S(j\omega) e^{-j(\omega + \omega_c)\tau_k} + W_k(j(\omega + \omega_c))$$

Se face aproximarea de bandă îngustă: $|S(j\omega)|$ scade repede cu $|\omega|$ așa încât

$$Y_k(j\omega) \cong H_k(j\omega_c)S(j\omega)e^{-j\omega_c\tau_k} + W_k(j(\omega + \omega_c))$$

În timp

$$y_k(t) \cong H_k(j\omega_c)s(t)e^{-j\omega_c\tau_k} + w'_k(t)$$



DEMODULARE

Definim *vectorul de transfer al ariei de senzori* (sau *vectorul direcție*)

$$\mathbf{e}(\theta) = \left[H_1(j\omega_c) e^{-j\omega\tau_1}, \dots, H_N(j\omega_c) e^{-j\omega\tau_N} \right]^T$$

$$\mathbf{y}(n) = [y_1(n), \dots, y_N(n)]^T$$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n), \dots, w_N(n)]^T$$

Rezultă

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{e}(\theta)s(n) + \mathbf{w}(n)$$

În relațiile de mai sus, θ intervine prin $\{\tau_k\}$, dar și prin $\{H_k(j\omega_c)\}$, dacă senzorii nu sunt omnidirecționali.

Cazul când senzorii sunt omnidirecționali și identici.

Vom redefini semnalul prin:

$$s(n)H(j\omega_c) \rightarrow s(n)$$

și rămâne

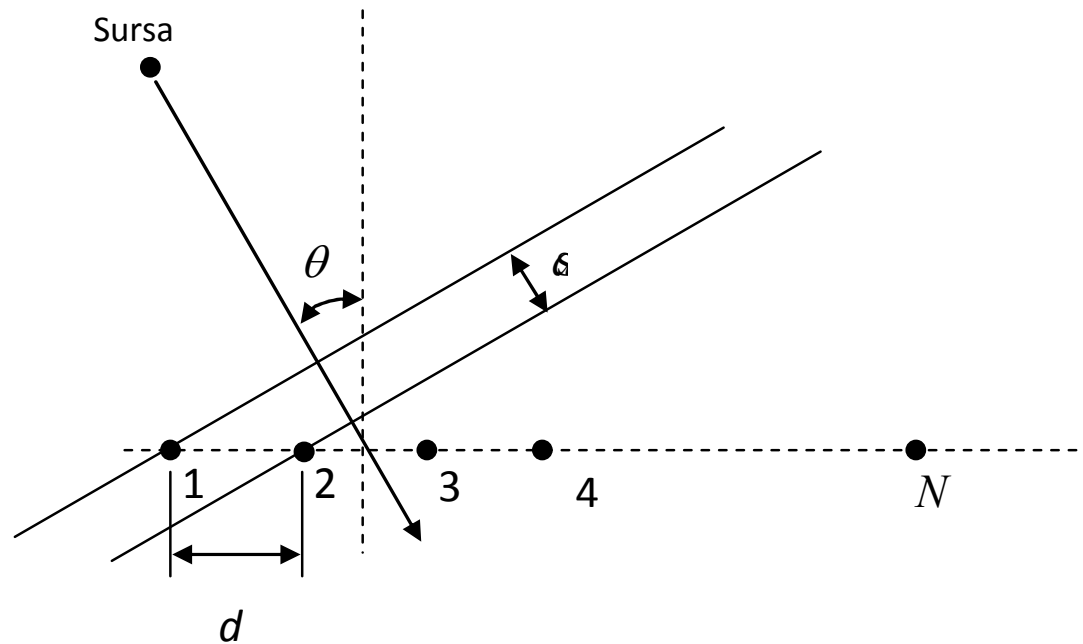
$$\mathbf{e}(\theta) = \left[e^{-j\omega_c\tau_1}, \dots, e^{-j\omega_c\tau_N} \right]^T$$

Cazul când sunt P surse se rezolvă prin superpoziție

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=1}^P \mathbf{e}(\theta_k) s_k(n) + \mathbf{w}(n) = \left[\mathbf{e}(\theta_1), \dots, \mathbf{e}(\theta_P) \right] \begin{bmatrix} s_1(n) \\ \vdots \\ s_P(n) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n)$$

Cazul șirului liniar uniform de senzori (ULA-Uniform Linear Array).

$$\tau_k = (k-1) \frac{d \sin \theta}{c}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$\mathbf{e}(\theta) = \left[e^{-j\omega_c \tau_1}, \dots, e^{-j\omega_c \tau_N} \right]^T$$

$$\tau_k = (k-1) \frac{d \sin \theta}{c}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\mathbf{e}(\theta) = \left[1, e^{-j\omega_c d \sin \theta / c}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_c d \sin \theta / c} \right]^T$$

Introducem *frecvența spațială*

$$\omega_s = 2\pi f_s = \omega_c \frac{d \sin \theta}{c}$$

$$f_s = f_c \frac{d \sin \theta}{c} = \frac{d \sin \theta}{\lambda}$$

$$\mathbf{e}(\theta) = \left[1, e^{-j\omega_s}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_s} \right]^T$$

Observații

- La fel ca în cazul eșantionării temporale, pentru a nu exista ambiguitate, sau fenomen de aliere,

$$|\omega_s| \leq \pi, \quad |f_s| \leq \frac{1}{2}$$

Aceasta implică

$$d|\sin \theta| \leq \lambda/2$$

îndeplinită dacă

$$d \leq \lambda/2$$

- Aria de senzori realizează o *eșantionare spațială* a semnalului, condiția de mai sus având semnificația teoremei eșantionării pentru acest caz.
- În condițiile expuse se constată o analogie perfectă cu modelul sinusoidelor în prezența zgomotului, așa încât metodele expuse acolo pentru determinarea frecvențelor se pot aplica în cazul ULA pentru determinarea direcțiilor de incidență.

Filtrare temporală-filtrarea spațială

Un filtru FIR realizează o transformare în domeniul timp descrisă prin

$$y_F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k u(n-k) = \mathbf{h}^H \mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{h}^H = [h_0, \dots, h_{P-1}]$$

În cazul aplicării unei sinusoide complexe, $u(n) = e^{j\omega n}$

$$y_F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{j\omega n} e^{-j\omega k} = \mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) u(n)$$

deci produsul

$$H(e^{j\omega}) = \mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega)$$

caracterizează comportarea filtrului în domeniul frecvență

(*caracteristica de frecvență*).

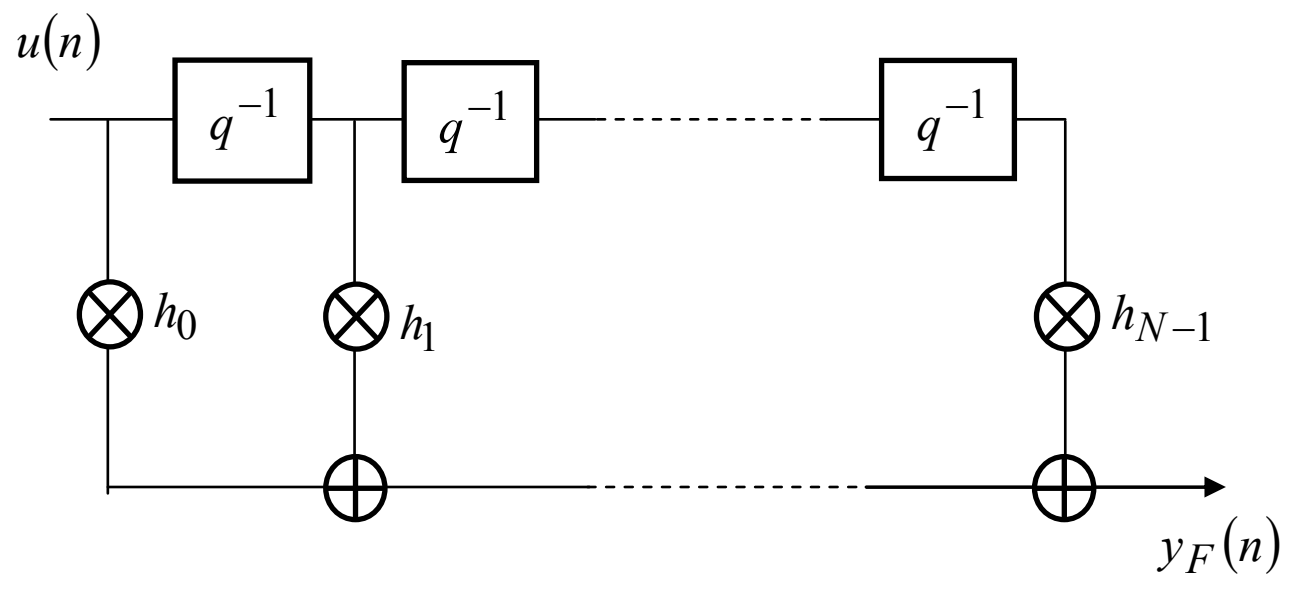
Cu ajutorul semnalelor date de aria de senzori, printr-o însumare ponderată se poate realiza o filtrare spațială

$$y_F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k y_k(n) = \mathbf{h}^H \mathbf{y}(n)$$

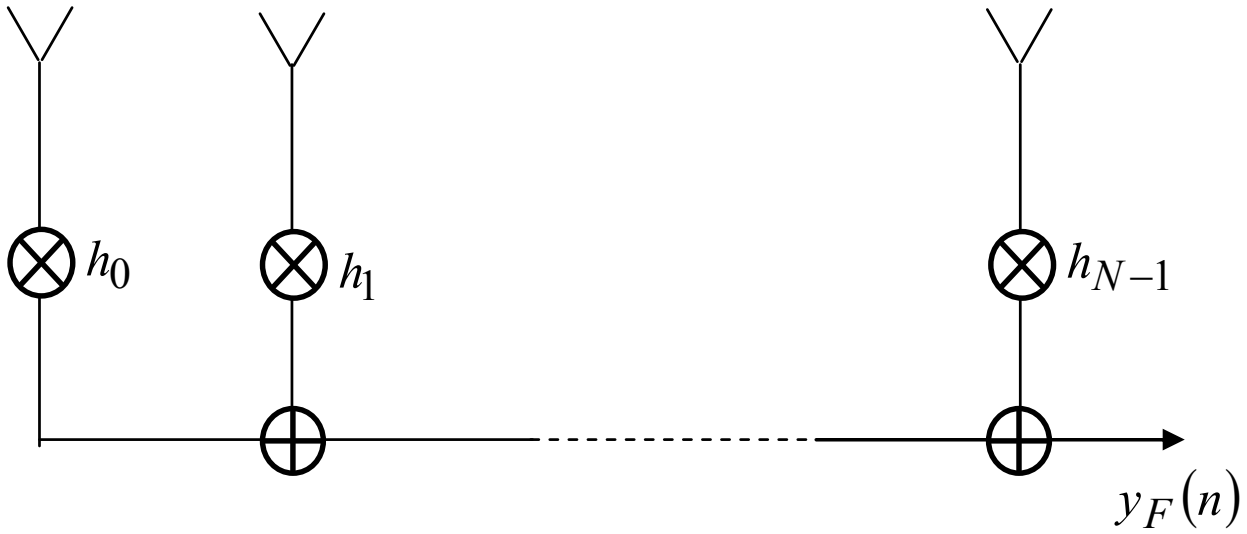
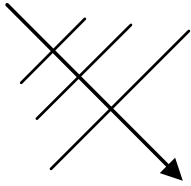
În cazul când există o singură undă incidentă, pe direcția θ ,

$$y_F(n) = \mathbf{h}^H \mathbf{e}(\theta) s(n)$$

deci produsul $\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\theta)$ caracterizează comportarea sistemului în domeniul coordonatei unghiulare θ (*caracteristica de directivitate*).

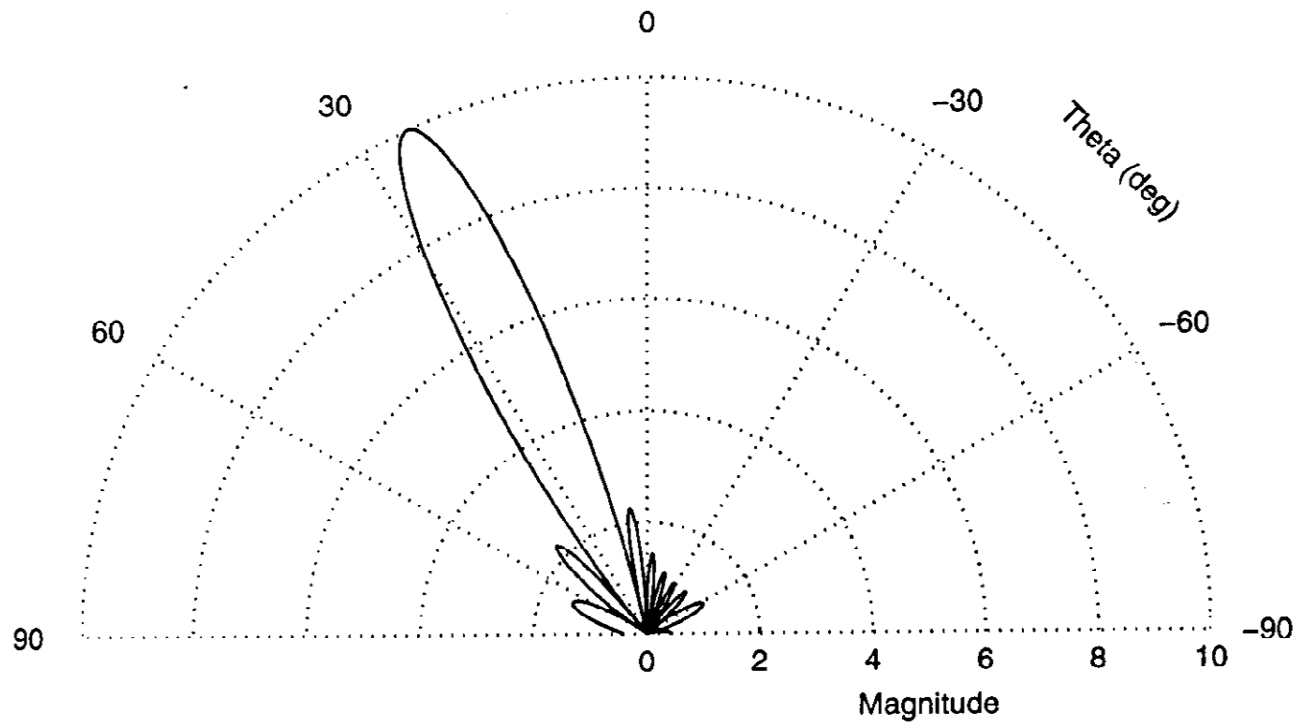


Filtru digital (temporal)



Filtru spațial

- Printr-o alegere corespunzătoare a coeficienților h_k se poate obține caracteristica de directivitate dorită. Problema este analoga sintezei unui filtru FIR.
- Problema sintezei caracteristicii de directivitate este cunoscută sub denumirea *beamforming*.
- Coeficienții pot fi reglați pe baza unui algoritm adaptiv, rezultând posibilitatea realizării unui sistem adaptiv de antene (*antene inteligente, smart antenna*).



Se poate pune de exemplu problema realizării unei valori impuse pe o direcție dată (direcția sursei utile) în condițiile unei atenuări maxime pe toate celelalte direcții.

Va trebui minimizată puterea semnalului filtrat spațial

$$E\{|y_F(n)|^2\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}, \quad \mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\}$$

cu condiția

$$\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\theta) = 1$$

Presupunând o distribuție spațială uniformă a câmpului, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ și rămâne

$$\min_{\mathbf{h}} \{\mathbf{h}^H \mathbf{h}\} \quad \text{cu condiția} \quad \mathbf{h}^H \mathbf{e}(\theta) = 1$$

Determinarea direcției de incidență - *Metoda Capon*

În domeniul frecvență, metoda presupune determinarea unui filtru

$$\mathbf{h}^H = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$$

având deci ieșirea la momentul n

$$y_F(n) = \mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n), \quad \mathbf{y}_N(n) = [y(n), \dots, y(n - N + 1)]$$

în următoarele două condiții:

- Filtrul să aibă câștig unitar la frecvența ω :

$$\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) = 1$$

- Puterea semnalului la ieșire să fie minimă.

- Aceasta presupune minimizarea cantității

$$E\{|y_F(n)|^2\} = E\{y_F(n)y_F^*(n)\} = E\{\mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n) \mathbf{y}_N^H(n) \mathbf{h}\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}$$

unde

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}_N(n) \mathbf{y}_N^H(n)\}$$

Filtrul căutat avea

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}$$

Puterea semnalului la ieșire în aceste condiții era

$$E\{|y_F(n)|^2\} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}$$

În domeniul spațial, rezultă minimizarea puterii semnalului filtrat spațial

$$E\{|y_F(n)|^2\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}, \quad \mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\}$$

cu condiția

$$\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\theta) = 1$$

unde de această dată

$$\mathbf{e}(\theta) = [1, e^{-j\omega_s}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_s}]^T$$

$$\mathbf{y}(n) = [y_1(n), \dots, y_N(n)]^T$$

Matricea \mathbf{R} de autocorelație devine o matrice de corelație a semnalelor recepționate de senzori la momentul n , cu elementele

$$R_{j,k} = \mathbb{E} \left\{ y_j(n) y_k^*(n) \right\}$$

În realitate se va lucra cu o matrice estimată, bazată pe măsurători efectuate în într-un număr M de tacte,

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left\{ \mathbf{y}_N(n) \mathbf{y}_N^H(n) \right\}$$

Având în vedere aceste analogii, rezultatele de la metoda Capon pot fi preluate, așa încât

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\theta)}{\mathbf{e}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\theta)}$$

$$\mathbb{E} \left\{ \left| y_F(n) \right|^2 \right\} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\theta)}$$

Estimatele lui θ corespund deci maximelor funcției

$$\frac{1}{\mathbf{e}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{e}(\theta)}$$

Determinarea direcției de incidență - *Metode bazate pe separarea subspațiilor*

Sunt direct legate de structura matricei de autocorelație.

În cazul de față ea devine

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n) \right\} = \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{A} \mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n) \right) \left(\mathbf{s}^H(n) \mathbf{A}^H + \mathbf{w}^H(n) \right) \right\} = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n) \right\} \mathbf{A}^H + \mathbf{E} \left\{ \mathbf{w}(n) \mathbf{w}^H(n) \right\} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}\end{aligned}$$

Ipoteze

- Zgomotul este spațial alb, adică zgomotele existente la
- nivelul diferitelor antene sunt independente, cu varianțe egale,

$$\mathbf{E} \left\{ \mathbf{w}(n) \mathbf{w}^H(n) \right\} = \sigma_w^2 \mathbf{I}$$

- Semnalele sunt independente de zgomote

$$\mathbf{E} \left\{ \mathbf{s}(n) \mathbf{w}^H(n) \right\} = \mathbf{0}$$

- Matricea de corelație a semnalelor, notată

$$\mathbf{E} \left\{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n) \right\} = \mathbf{P}$$

este presupusă nesingulară, eventual diagonală, dacă semnalele transmise de antene sunt statistic independente .

Aceste rezultate sugerează că metodele bazate pe proprietățile matricii de autocorelație pot fi utilizate în mod direct, având în vedere analogia cu

$$\mathbf{R} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{y}(n) \mathbf{y}^H(n) \right\} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{P} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n) \right\}$$

Metodele Pisarenko și MUSIC

- *Variantele spectrale*

În cazul metodei Pisarenko, această formă este

$$P_P(e^{j\omega_s}) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\theta) \mathbf{v}_N}, \quad \mathbf{e}(\theta) = \left[1, e^{-j\omega_s}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_s} \right]^T$$

Legătura între direcțiile de incidență, θ și frecvențele spațiale ω_s

depinde de geometria șirului de antene.

De exemplu, pentru ULA, $\omega_s = 2\pi f_s = \omega_c \frac{d \sin \theta}{c}$.

În cazul metodei MUSIC,

$$\hat{P}_{MUSIC}(e^{j\omega_s}) = \frac{1}{\|\mathbf{e}^H(\theta)\hat{\mathbf{G}}\|^2} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\theta)\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^H\mathbf{e}(\theta)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-P} |\mathbf{e}^H(\theta)\hat{\mathbf{g}}_i|^2}$$

- Variantele algebrice pot de asemenea fi folosite în ambele metode în cazul ULA. Pentru alte geometrii, nu sunt întotdeauna aplicabile. O problemă poate să apară în cazul în care semnalele emise de antene $s_i(n)$ sunt corelate, așa încât matricea \mathbf{P} nu mai este nesingulară.

Metoda normei minime

Practic nu prezintă alte particularități în aplicarea în domeniul spațial, față de cele prezentate pentru metodele anterioare. Pentru variant spectrală, se caută maximele funcției

$$\hat{P}_{MN}(e^{j\omega_s}) = \frac{1}{\left| \mathbf{e}^H(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix} \right|^2}$$

unde $\hat{\mathbf{g}}$ este un vector din spațiul zgomot, de normă minimă.

Metoda ESPRIT

În cazul ULA, metoda poate fi aplicată la fel ca în domeniul frecvență. Se pornește de la definirea matricelor matricele de tip $(N-1) \times P$

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{I}_{N-1} \quad 0] \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}_2 = [0 \quad \mathbf{I}_{N-1}] \mathbf{A}$$

legate prin

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{D}$$

dar matricea \mathbf{D} este

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left\{ e^{-j\omega_c \tau(\theta_1)}, \dots, e^{-j\omega_c \tau(\theta_P)} \right\}$$

Evident, această matrice conține informația utilă.