Problema estimării frecvenţelor unor semnale sinusoidale în prezenţa zgomotului

A. ***Estimarea pe baza subspaţiului semnal (metoda componentei principale)***

Se porneşte de la reţinerea numai a informaţiei conţinute în subspaţiul semnalelor, prin utilizarea unei aproximări a matricei de autocorelaţie

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=P+1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

obţinută reţinând numai

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Această idee poate fi aplicată în cazul tuturor metodelor care necesită matricea de autocorelaţie

B. ***Estimarea pe baza subspaţiului zgomot. Metoda Pisarenko***

În acest caz se are în vedere utilizarea relaţiei de ortogonalitate

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_k = 0, \quad \forall i,k, \; i = 1,\cdots,P, \; k = 1,\cdots,N-P$$

O primă metodă bazată pe acest principiu este aceea propusă de *Pisarenko*. In acest caz se ia $N=P+1$ şi se determină valorile proprii ale matricei de autocorelaţie $\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_N$. Cea mai mică dintre valorile proprii, λ_N şi vectorul propriu asociat vor corespunde spaţiului zgomot şi deci

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_N = 0, \quad \mathrm{i} = 1,...,P.$$

Se definește *pseudospectrul Pisarenko* prin

$$P_P\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{v}_N}, \quad \mathbf{e}(\omega)=\left[1,e^{-j\omega},\cdots,e^{-j(N-1)\omega}\right]^T$$

Frecvenţele ω_i vor putea fi deci deduse ca frecvenţe la care acesta

îşi atinge maximele (teoretic infinite).

Dacă se doreşte un calcul analitic, se observă că $z_i = e^{j\omega_i}$

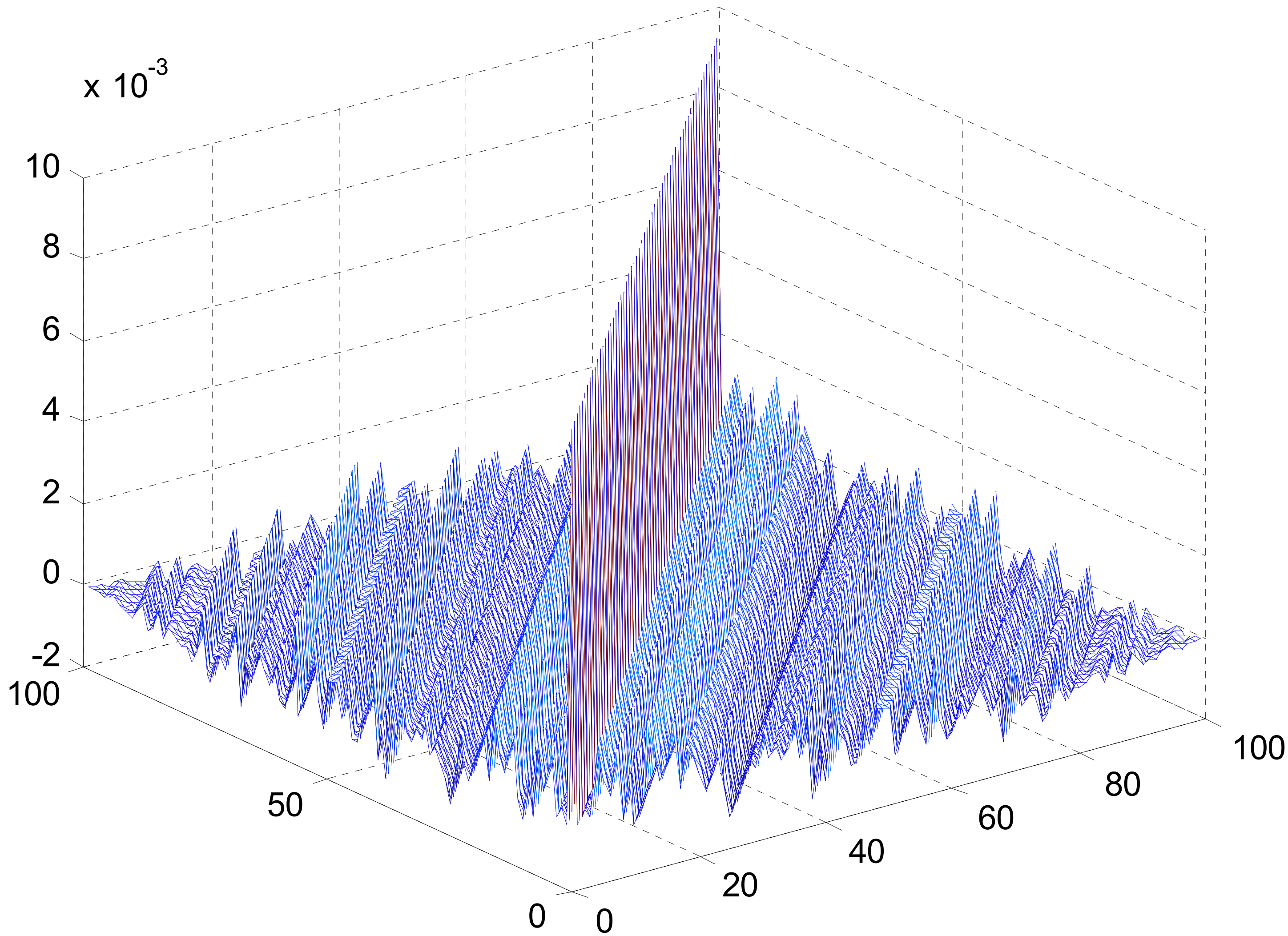
sunt rădăcini ale polinomului

$$A(z)=\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}, \; a_k = v_{N,k}, \quad k=0,\ldots,P$$

Exemplu

Fie un semnal sinusoidal cu amplitudinea A=10 și frecvența normată 0,2, suprapus peste un zgomot alb, cu varianța 0,01.

Se calculează mai întâi estimatul funcției de autocrelație. Pentru o estimare bună este util să se ia un număr cât mai mare de eșantioane.



Estimatul matricei de autocorelație pentru zgomot alb, N=100

Se va lucra deci cu N=P+1=3.

Se calculează matricea vectorilor proprii și valorile proprii (procedura *eig*).

v =

0.6481	0.2828	-0.7071
-0.3999	0.9166	-0.0000
0.6481	0.2828	0.7071

Λ =

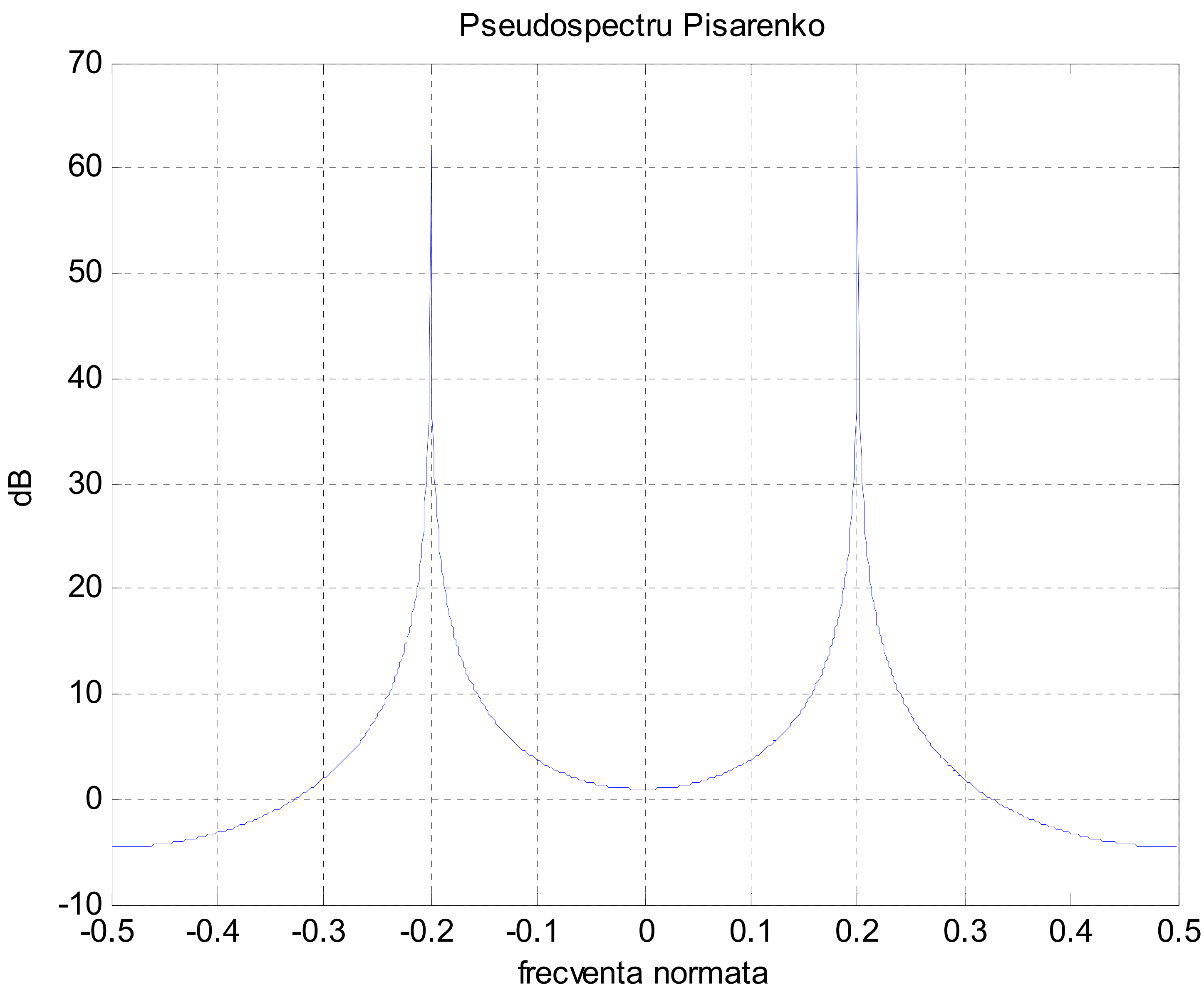
0.9425	0	0
0	59.8100	0
0	0	90.4390

Evident, cea mai mică valoare proprie este λ_1. Vectorul propriu asociat este

v =

$$\begin{matrix} 0.6481 \\ -0.3999 \\ 0.6481 \end{matrix}$$

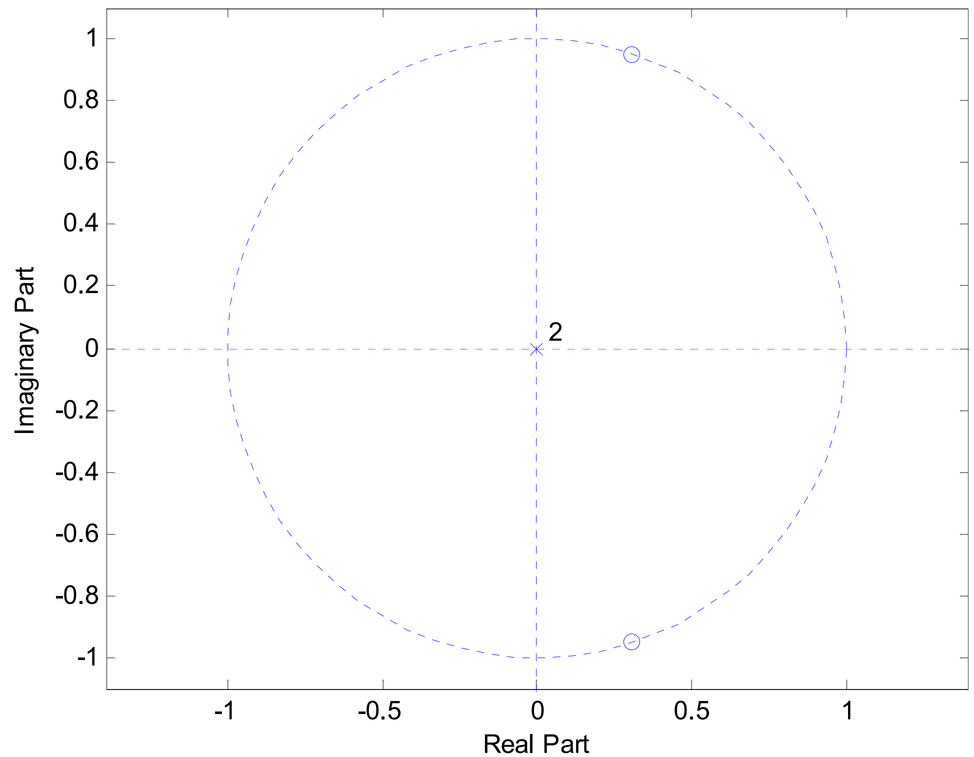
Cu acesta se construiește pseudospectrul. S-a utilizat scară logaritmică, în dB.


Pseudospectru Pisarenko
dB
frecventa normata
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Se pot calcula frecvențele, formând polinomul

$$P(z) = 0.6481 - 0.3999z^{-1} + 0.6481z^{-2}$$

Acesta are două zerouri pe cercul unitar, ale căror argumente sunt $\arg(z_i) = \pm 2\pi \bullet 0,2$



B. ***Estimarea pe baza subspaţiului zgomot. Metoda MUSIC***

Metoda MUSIC (**MU**ltiple **SI**gnal **C**lassification) poate fi privită ca o extindere a metodei Pisarenko. Vom porni de la ideea că

$$\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{pentru} \quad \omega = \omega_i, \ \ i = 1, \cdots, P$$

sau

$$\left\| \mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G} \right\|^2 = \mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{e}(\omega) = 0 \quad \text{pentru} \quad \omega = \omega_i, \ \ i = 1, \cdots, P$$

Lucrând cu valorile estimate în locul celor reale, norma de mai sus nu va mai fi zero, dar va prezenta minime pronunţate.

Se defineşte estimatorul *pseudospectru MUSIC* prin:

$$\hat{P}_{MUSIC}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left\|\mathbf{e}^{H}(\omega)\hat{\mathbf{G}}\right\|^{2}}=\frac{1}{\mathbf{e}^{H}(\omega)\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^{H}\mathbf{e}(\omega)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-P}\left|\mathbf{e}^{H}\hat{\mathbf{g}}_{i}\right|^{2}}$$

Dacă s-ar lucra cu valorile exacte (fără estimări), pentru

oricare din frecvenţele ω_k , k=1,..P

$$P_{MUSIC}(\omega)\rightarrow\infty \text{ pentru } \omega=\omega_k,\ k=1,..,P.$$

În realitate, din cauza erorilor de estimare, valorile estimatorului sunt finite, dar cu nişte maxime foarte pronunţate la frecvenţele $\boldsymbol{\omega}_k$.

O primă posibilitatea de a găsi frecvențele $\boldsymbol{\omega}_k$ va consta deci în căutarea maximelor pseudospectrului.

Există însă și o posibilitate de calcul analitic (metoda *Root-MUSIC*)

Dacă se introduc polinoamele

$$G_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1} z^{-1} + \cdots + g_{i,N-1} z^{-(N-1)}, \quad i = 1, \cdots, P$$

unde

$$\mathbf{g}_i^T = \left[g_{i,0}, g_{i,1}, \cdots, g_{i,N-1} \right]$$

rezultă

$$\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i = G_i\left(e^{j\omega}\right); \qquad \left\| \mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i \right\|^2 = G_i(z) G^*{}_i\left(1/z^*\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\left\|\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i\right\|^2 = G_i(z)G^*{}_i\left(1/z^*\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\hat{P}_{MUSIC}(\omega) = \left.\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-P}\hat{G}_i(z)\hat{G}_i^*\left(1/z^*\right)}\right|_{z=e^{j\omega}} = \left.\frac{1}{D(z)D^*\left(1/z^*\right)}\right|_{z=e^{j\omega}}$$

Nulurile lui *D* (*z*) sunt poli ai estimatorului. Sunt în total *N*-1 nuluri, din care *P* sunt cele căutate, care ar trebui să se afle exact pe cercul de rază unitate. Celelalte nu se află pe acest cerc şi vor fi eliminate. In măsura în care ele se apropie de cerc, pot fi confundate cu rădăcini utile.

Observații

- În toate aceste metode este esenţială identificarea corectă a celor două categorii de vectori proprii. Dacă ordinul *P* este cunoscut, lucrul acesta se poate face relativ uşor, spaţiul semnalelor fiind caracterizat prin vectorii proprii corespunzători valorilor proprii cele mai mari, în număr de *P*. Celelalte valori proprii vor fi mai mici şi aproximativ egale între ele. Această observaţie poate fi utilizată atunci când *P* nu este cunoscut. Separarea devine cu atât mai dificilă cu cât raportul semnal/zgomot este mai mic.
- Metoda presupune calculul matricei de autocorelaţie, deci calculul unui estimat al funcţiei de autocorelaţie, pe un număr *L* de eşantioane.

Exemplu

Vom lua același caz ca mai înainte.

Alegem N=5. Calculăm vectorii și valorile proprii cu procedura *eig*, care face implicit și ordonarea după valorile proprii, dar în sens crescător.

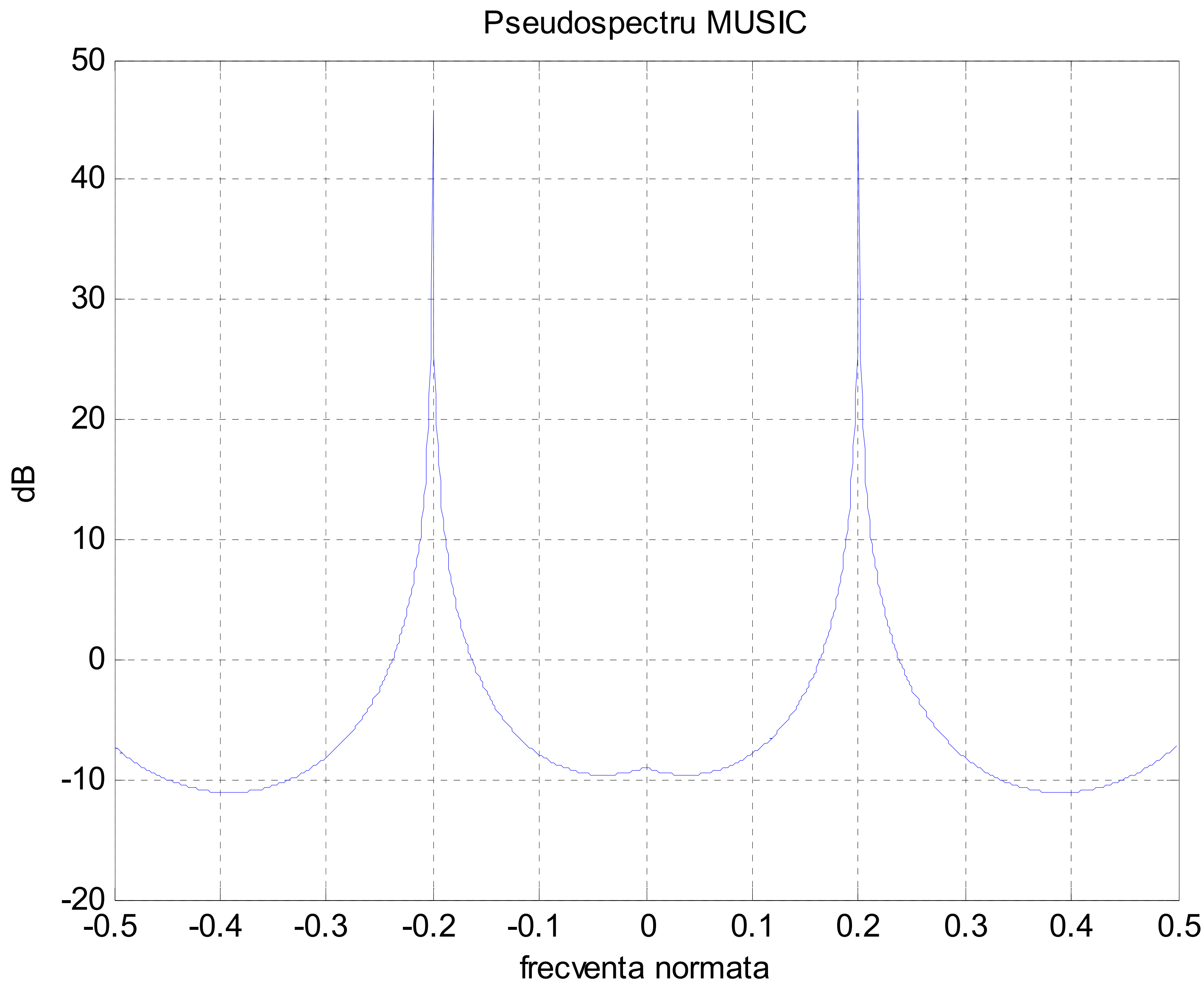
v =

0.3261	0.3634	-0.6022	-0.3707	0.5114
-0.3480	0.5844	0.3707	-0.6022	-0.1934
0.7383	0.2299	-0.0000	0.0000	-0.6341
-0.3480	0.5844	-0.3707	0.6022	-0.1934
0.3261	0.3634	0.6022	0.3707	0.5114

$$\Lambda =$$

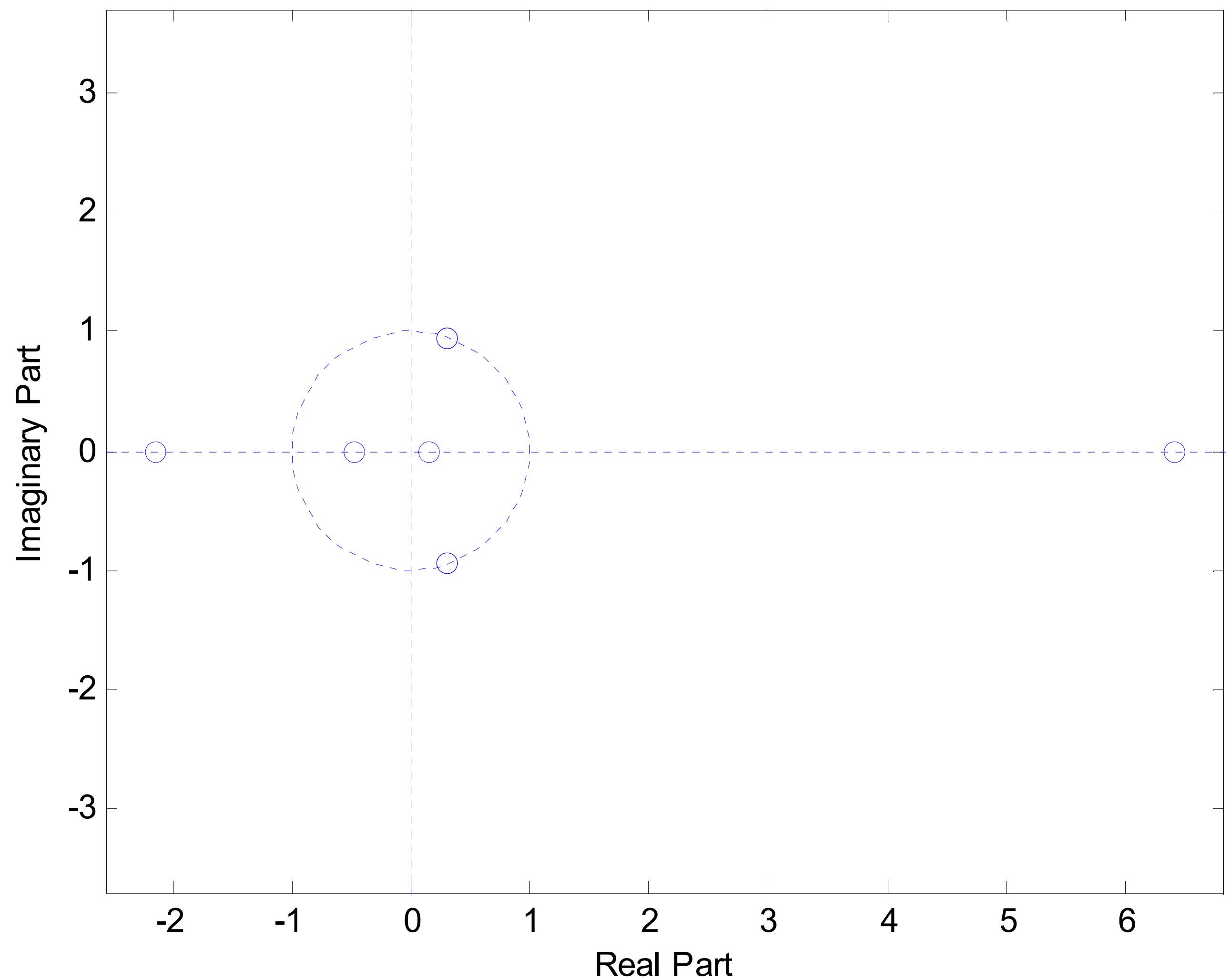
$$\begin{matrix} 0.6358 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3127 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6182 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 124.5163 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 124.7127 \end{matrix}$$

Evident, valorile proprii principale sunt ultimele două.



Pseudospectru MUSIC
dB
frecventa normata
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Zerourile de pe cercul unitar determină frecvențele căutate.



Metoda ESPRIT

Fie matricele de tip $(N-1)\times P$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{e}_1(n), \mathbf{e}_2(n), \cdots, \mathbf{e}_P(n)\right]$$

Se poate verifica uşor că

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{D}$$

unde

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left\{e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}, \cdots, e^{-j\omega_P}\right\}$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left\{e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}, \cdots, e^{-j\omega_P}\right\}$$

D este o matrice unitară, aşa încât transformarea de mai sus este o rotaţie,

de aici venind denumirea metodei

(***E****stimation of* ***S****ignal* ***P****arameters by* ***R****otational* ***I****nvariance* ***T****echniques*).

La fel, definim

$$\mathbf{S}_1 = \left[\mathbf{I}_{N-1} \quad \mathbf{0}\right]\mathbf{S}$$
$$\mathbf{S}_2 = \left[\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{N-1}\right]\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_P\right] \qquad (N \times P)$$

$$\mathbf{RS} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\Lambda}_S + \sigma_w^2 \mathbf{I}\right) = \mathbf{APA}^H\mathbf{S} + \sigma_w^2\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}_S = \mathbf{APA}^H\mathbf{S}$$

unde

$$\boldsymbol{\Lambda}_S = \mathrm{diag}\left\{\lambda_{S1}, \cdots, \lambda_{SP}\right\}$$

deci

$$\mathbf{S} = \mathbf{AC}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{PA}^H\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}_S^{-1}$$

C este nesingulară, deoarece **A** şi **S** sunt de rang maxim, iar

P şi $\boldsymbol{\Lambda}_S$ sunt diagonale, cu elemente nenule pe diagonală.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{C}$$
$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{A}_2\mathbf{C}$$

sau

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{D}\mathbf{C} = \mathbf{S}_1\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C} = \mathbf{S}_1\mathbf{\Phi}$$

unde

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$$

Observaţii

- $\mathbf{\Phi}$ şi $\mathbf{D}$ au aceleaşi valori proprii, $\lambda_{Di} = e^{-j\omega_i}$, $i = 1, \cdots, P$;

- Datorită structurii Vandermonde a matricei $\mathbf{A}$, matricele $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ au rangul N şi deci de aceeaşi proprietate se bucură $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, aşa încât $\mathbf{\Phi}$ se poate calcula cu ajutorul pseudoinversei

$$\mathbf{\Phi} = \left(\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1\right)^{-1} \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2$$

Algorimul ESPRIT

- se estimează matricea $\hat{\mathbf{R}}$;
- se deduce matricea $\hat{\mathbf{S}}$;
- din aceasta se deduc $\hat{\mathbf{S}}_1,\ \hat{\mathbf{S}}_2$;
- se calculează $\hat{\mathbf{\Phi}} = \left(\hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_1\right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_2$;
- se calculează valorile proprii $\hat{\lambda}_{\Phi i},\ i = 1, \cdots, P$;
- se calculează frecvenţele $\hat{\omega}_i = -\arg\left\{\hat{\lambda}_{\Phi i}\right\},\ i = 1, \cdots, P$

Metoda Capon

Se porneşte de la ideea utilizării unui filtru trece bandă, de bandă cât mai îngustă, centrat pe frecvenţa ω. Acesta va selecta deci din spectrul semnalului componenta respectivă. Variind această frecvenţă se pot găsi componentele spectrale ale semnalului. Fie funcţia pondere

$$\mathbf{h}^H = [h_0, h_1, \cdots, h_{N-1}]$$

Intrarea filtrului este deci

$$y(n) = \sum_{i=1}^{P} A_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega_i n} + w(n)$$

iar ieşirea este

$$y_F(n) = \mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n), \quad \mathbf{y}_N(n) = [y(n), \cdots, y(n-N+1)]$$

Vom pune două condiţii:

- Filtrul să aibă câştig unitar la frecvenţa ω:

$$\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) = 1$$

- Puterea semnalului la ieşire să fie minimă. Aceasta presupune minimizarea cantităţii

$$\mathrm{E}\left\{|y_F(n)|^2\right\} = \mathrm{E}\left\{y_F(n)y_F^*(n)\right\} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n)\mathbf{y}_N^H(n)\mathbf{h}\right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}\mathbf{h}$$

Problema se reduce deci la găsirea coeficienţilor **h** care satisfac

$$\min_{\mathbf{h}}\left\{\mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h}\right\}, \quad \text{cu conditia} \quad \mathbf{h}^H\mathbf{e}(\omega)=1$$

Pentru rezolvarea problemei de extrem condiţionat se utilizează

metoda multiplicatorilor Lagrange, conducând la minimizarea expresiei reale

$$L(\mathbf{h})=\mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h}+2\,\mathrm{Re}\left\{\lambda\left(\mathbf{h}^H\mathbf{e}(\omega)-1\right)\right\}=\mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h}+\lambda\left(\mathbf{h}^H\mathbf{e}(\omega)-1\right)+\lambda^*\left(\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{h}-1\right)$$

$$L(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^H \mathbf{R}\mathbf{h} + 2\,\mathrm{Re}\left\{\lambda\left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1\right)\right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}\mathbf{h} + \lambda\left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1\right) + \lambda^*\left(\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{h} - 1\right)$$

Punând condiţia

$$\nabla_{\mathbf{h}^*} L(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}\mathbf{h} + \lambda\mathbf{e}(\omega) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = -\lambda\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)$$

λ se determină din condiţia de câştig unitar la frecvenţa ω:

$$\lambda = -\frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

Rezultă

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

Puterea semnalului la ieşire este

$$\mathrm{E}\left\{\left|y_F(n)\right|^2\right\}=\frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

În cazul zgomotului alb,

$$\mathbf{R}=\sigma^2\mathbf{I},\quad \mathrm{E}\left\{\left|y_F(n)\right|^2\right\}=\frac{\sigma^2}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{e}(\omega)}=\frac{\sigma^2}{N}$$

Relaţia aceasta sugerează că se poate obţine un estimator pentru densitatea spectrală de putere prin înmulţire cu N:

$$P_{MV}(\omega)=\frac{N}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

În realitate se lucrează cu estimatori ai corelaţiei, aşa încât estimatorul de varianţă minimă al densităţii spectrale de putere devine

$$\hat{P}_{MV}(\omega)=\frac{N}{\mathbf{e}^H(\omega)\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

În cazul zgomotului alb, funcţia de pondere devine

$$\mathbf{h}=\frac{1}{N}\mathbf{e}(n);\quad h_k=\frac{1}{N}e^{-jk\omega},\quad k=0,\cdots,N-1$$

şi

$$y_F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}y(n-k)e^{-jk\omega}$$