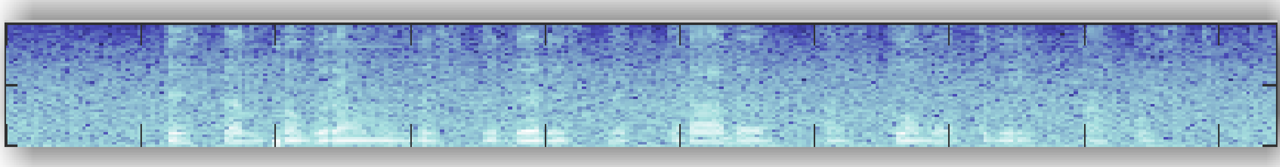
6. PROCESE ALEATOARE DISCRETE ÎN TIMP



6.1 Proprietăţi generale

6.1.1 Medii statistice. Clasificări

- Un proces aleator discret poate fi definit ca o secvenţă de variabile aleatoare $x(n)$, indexată cu variabila temporală n.
- $x(n)$, poate fi caracterizat prin *funcţia densitate de probabilitate*, care va fi în general o funcţie de timp, $w_{x(n)}(x)$.
- Valoarea medie:

$$m_x(n) = \mathrm{E}\{x(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{x(n)}(x) \,\mathrm{d}\, x$$

6.1.1 Medii statistice. Clasificări

- *Funcţiile de corelaţie şi covarianţă* vor depinde de două variabile temporale,

$$r_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\{x(k)y^*(l)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^* w_{x(k)y(l)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$c_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\{(x(k)-m_x(k))(y(l)-m_y(l))^*\} = r_{xy}(k,l) - m_x(k)m_y^*(l)$$

- $x(k)$ şi $y(l)$ sunt două variabile aleatoare *statistic independente* dacă:

$$w_{x(k)y(l)}(x,y) = w_{x(k)}(x)w_{y(l)}(y)$$

$$\Rightarrow \ r_{xy}(k,l) = m_x(k)m_y^*(l) \qquad \Rightarrow \quad c_{xy}(k,l) = 0$$

6.1.1 Medii statistice. Clasificări

- $x(k)$ şi $y(l)$ sunt *necorelate* dacă

$$c_{xy}(k,l) = 0$$

- $x(k)$ şi $y(l)$ statistic independente $\Rightarrow x(k)$ şi $y(l)$ necorelate.
- Reciproca nu este în general adevărată.
  Ea are totuşi loc în cazul proceselor gaussiene, unde cele două noţiuni sunt echivalente.
- $x(k)$ şi $y(l)$ sunt *ortogonale*, dacă

$$r_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\{x(k)y^*(l)\} = 0$$

6.1.1 Medii statistice. Clasificări

- În cazul particular $x=y$, se obţin *funcţiile de autocorelaţie*

$$r_{xx}(k,l) = \mathrm{E}\{x(k)x^*(l)\}$$

- *şi autocovarianţă,*

$$c_{xx}(k,l) = \mathrm{E}\left\{(x(k) - m_x(k))(x(l) - m_x(l))^*\right\} =$$
$$= r_{xx}(k,l) - m_x(k)m_x^*(l)$$

6.1.1 Medii statistice. Clasificări

- Se poate uşor demonstra că:
  - Dacă $x(k)$ şi $y(l)$ sunt variabile aleatoare ortogonale, funcţia de autocorelaţie a sumei este egală cu suma funcţiilor de autocorelaţie,

$$r_{x+y,x+y}(k,l) = r_{xx}(k,l) + r_{yy}(k,l)$$

  - Dacă $x(k)$ şi $y(l)$ sunt variabile aleatoare necorelate, autocovarianţa sumei este egală cu suma autocovarianţelor,

$$c_{x+y,x+y}(k,l) = c_{xx}(k,l) + c_{yy}(k,l)$$

Proces aleator staţionar

- Dacă proprietăţile statistice sunt independente de timp se zice că procesul este staţionar.
- Dacă densitatea de probabilitate de ordinul 1, $w_{x(n)}(x) = w_x(x)$ nu depinde de *n*, $\Rightarrow$ media $m_x(n) = m_x$ nu depinde de *n*.
- Se spune în acest caz că procesul este *staţionar de ordinul 1* sau *staţionar în medie.*

Proces aleator staţionar

- Dacă densitatea de probabilitate de ordinul 2, satisface condiţia

$$w_{x(k)x(l)}(x_1, x_2) = w_{x(k+n)x(l+n)}(x_1, x_2)$$

pentru orice *n* întreg, se spune că procesul este *staţionar de ordinul doi*.

- In acest caz funcţia de autocorelaţie va fi

$$r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k+n, l+n) \qquad (\forall) n \in \mathbb{Z}$$

Proces aleator staţionar

- sau luând $n = -l$,

$$r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k-l,0) = r_{xx}(k-l)$$

- deci funcţia de autocorelaţie depinde numai de diferenţa momentelor de timp $k-l$.
- În fine, dacă proprietatea de mai sus poate fi extinsă pentru densităţile de probabilitate de orice ordin, se spune că procesul este *staţionar în sens strict*.

Proces aleator staţionar

- Proces aleator *staţionar în sens larg*:
  - $m_x(n) = m_x$,constant;
  - $r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k-l)$,depinde numai de diferenţa momentelor de timp;
  - $c_{xx}(0) < \infty$,(este finit).
- Deoarece condiţiile acestea se pun numai asupra momentelor, ele sunt mai slabe decât cele impuse asupra densităţilor de probabilitate.

Proprietăţi ale funcţiilor de corelaţie pentru procese aleatoare staţionare în sens larg

$$r_{xy}(k) = \mathrm{E}\left\{x(n+k)y^*(n)\right\} = \mathrm{E}\left\{x(n)y^*(n-k)\right\}$$

$$r_{xx}(k) = \mathrm{E}\left\{x(n+k)x^*(n)\right\} = \mathrm{E}\left\{x(n)x^*(n-k)\right\}$$

$$r_{yx}(k) = \mathrm{E}\left\{y(n+k)x^*(n)\right\} = \mathrm{E}\left\{x(n)y^*(n+k)\right\}^* = r_{xy}^*(-k)$$

- În particular

$$r_{xx}(k) = r_{xx}^*(-k)$$

- deci *secvenţa de autocorelaţie este conjugat simetrică.*

Proprietăţi ale funcţiilor de corelaţie pentru procese aleatoare staţionare în sens larg

- Având în vedere că

$$c_{xy}(k) = r_{xy}(k) - m_x m_y^*$$

- rezultă de asemenea

$$c_{yx}(k) = c_{xy}^*(-k)$$

- deci, în particular, şi funcţia de *autocovarianţă este conjugat simetrică*, şi

$$c_{xx}(k) = r_{xx}(k) - |m_x|^2$$

Proprietăţi ale funcţiilor de corelaţie pentru procese aleatoare staţionare în sens larg

- Valoarea din origine a funcţiei de autocorelaţie,

$$r_{xx}(0) = \mathrm{E}\left\{ |x(n)|^2 \right\}$$

- reprezintă *valoarea medie pătratică* a procesului aleator $x(n)$. Se poate demonstra că *modulul funcţiei de autocorelaţie îşi atinge maximul în origine*,

$$|r_{xx}(n)| < r_{xx}(0), \quad n \neq 0$$

- Valoarea în origine a funcţiei de autocovarianţă este numită *varianţă*

$$\mathrm{var}\{x\} = c_{xx}(0) = \sigma_x^2 = r_{xx}(0) - |m_x|^2$$

- unde σ_x este *dispersia*.

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Se pune problema de a estima valorile medii statistice pornind de la cunoaşterea eşantioanelor succesive ale unei singure realizări particulare a procesului aleator.
- Dacă se cunosc $2N+1$ eşantioane ale unei realizări particulare, se poate evalua *media aritmetică* a acestora,

$$\hat{m}_x(N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

- Cantitatea de mai sus tinde către media statistică $\mathrm{E}\{x(n)\}$, atunci când N creşte?

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Problema are sens numai dacă procesul este staţionar în medie (deci dacă media statistică este constantă).
- Se spune că $\hat{m}_x(N)$ tinde către m_x în medie pătratică dacă

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\hat{m}_x(N) - m_x\right|^2\right\} = 0$$

- Un proces care satisface relaţia de mai sus se zice că este *ergodic în medie* şi vom scrie că:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{m}_x(N) = m_x = \mathrm{E}\{x(n)\}$$

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un proces staţionar în sens larg să fie ergodic în medie este

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} c_{xx}(n) = 0$$

- Ideea de estimare temporală se poate extinde şi asupra altor medii.

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Pentru funcţia de autocorelaţie

$$y_k(n) = x(n+k)x^*(n)$$

$$\hat{r}_{xx}(k,N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} y_k(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n+k)x^*(n)$$

- Dacă acesta converge în medie pătratică spre $r_x(k)$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\hat{r}_{xx}(k,N) - r_{xx}(k)\right|^2\right\} = 0$$

- se spune că procesul este *ergodic în autocorelaţie* şi se scrie

$$\lim_{N\to\infty} \hat{r}_{xx}(k,N) = r_{xx}(k)$$

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Pentru un asemenea proces putem scrie:

$$r_{xx}(0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

- Această expresie reprezintă însă *puterea medie a semnalului*, deci:
- *Funcţia de autocorelaţie evaluată în origine este egală cu puterea medie a semnalului.*
- Relaţia: $r_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2$

6.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

- Vom accepta în general faptul că

$$\lim_{n \to \infty} c_{xx}(n) = 0$$

- Aceasta corespunde ipotezei naturale că două eşantioane luate la momente de timp foarte depărtate devin practic necorelate. Se poate demonstra că această condiţie are drept urmare faptul că procesul aleator este ergodic în medie.

6.1.3 Proprietăţi spectrale

- Vom introduce transformata Z a funcţiei de autocorelaţie.

$$Z\{r_{xx}(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) z^{-n} \mathrel{\hat{=}} P_{xx}(z)$$

$$r_{xx}(n) = Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C P_{xx}(z) z^{n-1} \,\mathrm{d}z$$

- unde C este un cerc inclus în domeniul de convergenţă al lui $P_{xx}(z)$.
- S-a văzut că $r_{xx}(n)=r^*_{xx}(-n)$, astfel încât :

$$P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^*_{xx}(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^*_{xx}(n) z^{n} = P^*_{xx}\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

6.1.3 Proprietăţi spectrale

- În cazul unui semnal real,

$$P_{xx}(z) = P_{xx}\left(z^{-1}\right)$$

- În consecinţă, domeniul de convergenţă este de forma $R_{-} < |z| < R_{+}$, cu R+=1/R-.

- Aceasta înseamnă că dacă domeniul de convergenţă este nevid, R-<1, R+>1, deci cercul $|z| = 1$ este inclus în domeniul de convergenţă.

6.1.3 Proprietăţi spectrale

- Trecând deci pe cercul z=e$^{j\omega}$, se obţin *relaţiile Wiener-Hincin:*

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega}\,d\omega = \mathrm{TFTDI}\left\{P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)\right\}(n)$$

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n)e^{-jn\omega} = \mathrm{TFTD}\left\{r_{xx}(n)\right\}(\omega)$$

6.1.3 *Proprietăţi spectrale*

- Pentru n=0,

$$r_{xx}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

- relaţie ce justifică numele de densitate spectrală de putere dat funcţiei $P_{xx}(e^{j\omega})$ deoarece

$$c_{xx}(0)=r_{xx}(0)=E\left\{\left|x(n)\right|^2\right\}$$

- reprezintă puterea medie a semnalului.

6.1.3 *Proprietăţi spectrale*

- **În concluzie:**
  - Secvenţa de autocorelaţie şi funcţia densitate spectrală de putere reprezintă o pereche de transformate Fourier.
  - Această proprietate se extinde şi asupra funcţiei de autocovarianţă pentru semnale cu valoare medie nulă. Acesta este şi motivul pentru care în multe lucrări se întâlneşte afirmaţia că funcţia de autocovarianţă şi densitatea spectrală de putere formează o pereche de transformate Fourier.

6.1.3 Proprietăţi spectrale

– Se remarcă însă că dacă valoarea medie nu este nulă, transformata Z a funcţiei de autocorelaţie are domeniul de convergenţă vid, iar transformata Fourier conţine un impuls delta în origine.

– Funcţia densitate spectrală de putere este o funcţie reală de ω. În plus, rezultă că densitatea spectrală de putere a unui semnal real este o funcţie pară de ω. Se poate de asemenea demonstra că această funcţie este nenegativă,

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) \geq 0$$

6.1.3 Proprietăţi spectrale

– Prin extensie se pot defini densităţile de putere de interacţiune, ca transformate ale funcţiilor de intercorelaţie:

$$P_{xy}(z) = Z\left\{r_{xy}(n)\right\}(z)$$

$$P_{xy}\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{TFTD}\left\{r_{xy}(n)\right\}(\omega)$$

Aplicatie

- Fie un proces aleator staţionar discret caracterizat prin

$$\mathrm{E}\{x(n)\}=0, \quad r_{xx}(k)=\alpha^{|k|}, \quad 0<\alpha<1$$

- Să evaluăm şi să reprezentăm, ca funcţie de ω, densitatea spectrală de putere.

$$P_{xx}(z)=Z\{r_{xx}(k)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{|k|}z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}(\alpha z)^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha z)^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^{k}$$

Aplicatie

- Prima din cele doua progresii geometrice este convergentă dacă:

$$|\alpha z|<1 \quad \Rightarrow \quad |z|<\frac{1}{\alpha}$$

- iar a doua, dacă:

$$\left|\alpha z^{-1}\right|<1 \quad \Rightarrow \quad |z|>\alpha$$

- Rezultă domeniul comun de convergenţă,

$$\alpha<|z|<\frac{1}{\alpha}$$

- nevid dacă $0<\alpha<1$.

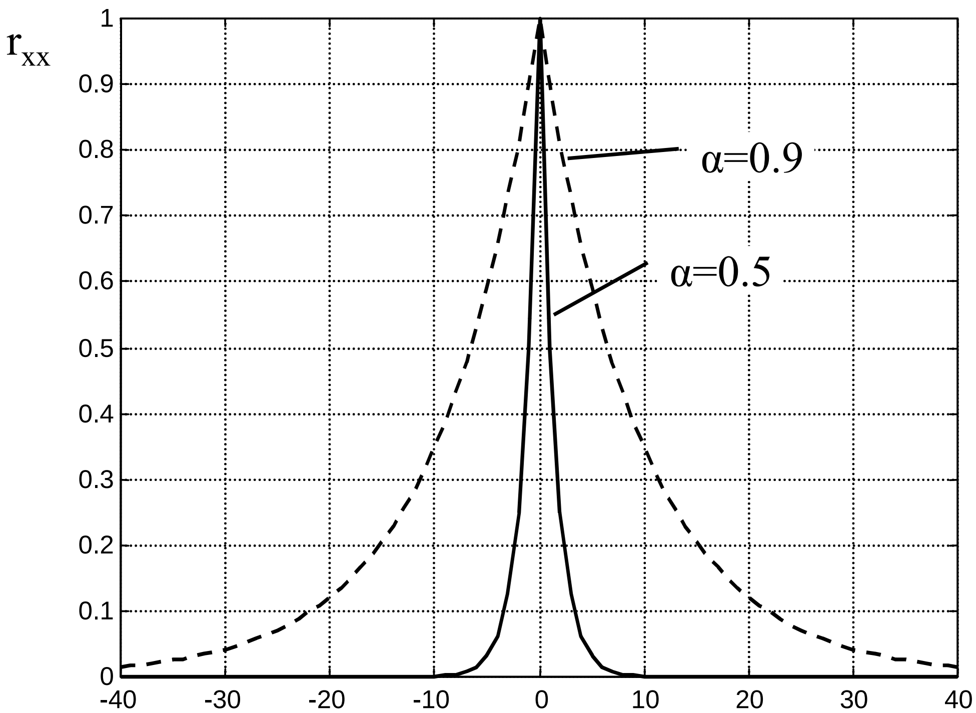
Aplicatie

$$P_{xx}(z) = \alpha z \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}$$

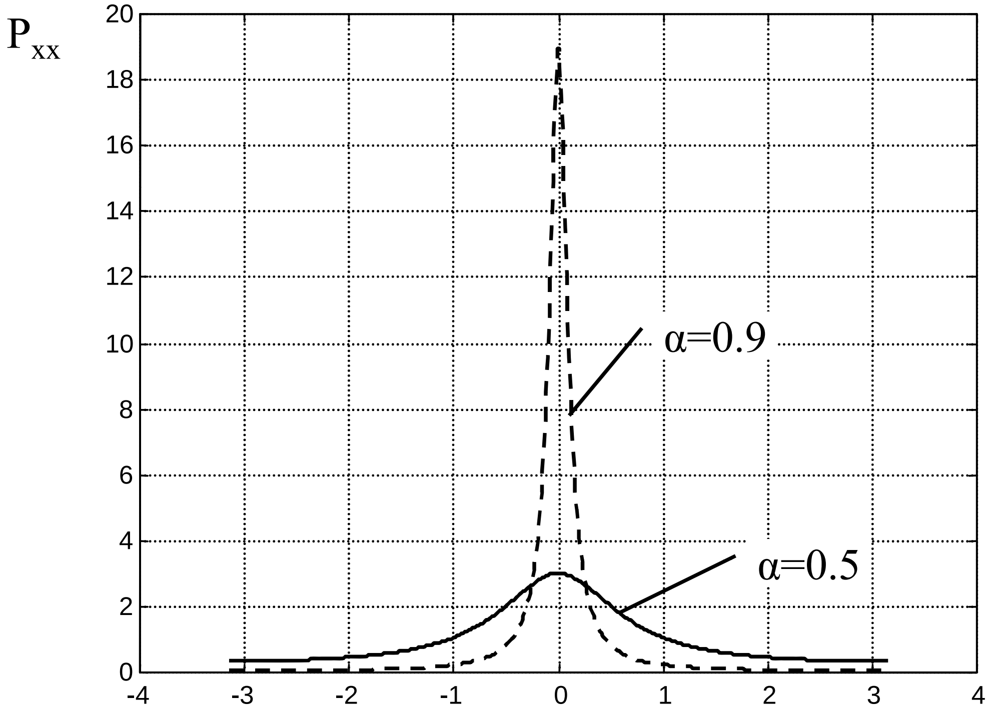
- Deoarece domeniul de convergenţă include cercul $|z|=1$, are sens

$$P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{1-\alpha^2}{\left(1-\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\left(1-\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}$$

Aplicatie



Aplicatie



6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar în sens larg aplicat unui sistem liniar, invariant în timp, cu funcţia de pondere $h(n)$ si ieşirea sistemului, $y(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = x(n) * h(n)$$

- *Valoarea medie a semnalului la ieşire*

$$\mathrm{E}\{y(n)\} = \mathrm{E}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{E}\{x(n-k)\} =$$

$$= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}\right)$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Funcţia de corelaţie între semnalele de la ieşire şi intrare*

$$r_{yx}(k) = \mathrm{E}\{y(n+k)x^*(n)\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n+k-l)x^*(n)\right\} =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\mathrm{E}\{x(n+k-l)x^*(n)\}$$

$$\boxed{r_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) r_{xx}(k-l) = r_{xx}(k) * h(k)}$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Funcţia de autocorelaţie a ieşirii*

$$r_{yy}(k) = \mathrm{E}\{y(n+k)y^*(n)\} = \mathrm{E}\left\{y(n+k)\sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*(l)h^*(n-l)\right\} =$$

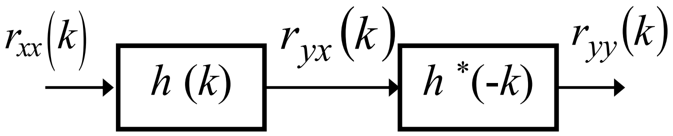
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(n-l)\mathrm{E}\{y(n+k)x^*(l)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(-l)r_{yx}(k-l)$$

$$\boxed{r_{yy} = r_{yx}(k) * h^*(-k)}$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Ţinând seama de expresia obţinută pentru funcţia $r_{yx}(k)$ rezultă

$$\boxed{r_{yy}(k) = r_{xx}(k) * h(k) * h^*(-k)}$$



6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Densitatea spectrală de putere a semnalului de ieşire*
- Vom presupune în cele ce urmează că semnalul de intrare are valoare medie nulă, deci

$$Z\{r_{xx}(k)\} = P_{xx}(z); \qquad Z\{r_{yy}(k)\} = P_{yy}(z)$$

- şi

$$H(z) = Z\{h(n)\}$$

- Rezultă imediat

$$Z\{h^*(-n)\} = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- deci având în vedere expresia obţinută mai înainte pentru $r_{yy}(k) = r_{xx}(k) * h(k) * h^*(-k)$

  şi teorema convoluţiei,

$$\boxed{P_{yy}(z) = P_{xx}(z) H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}$$

- sau, în frecvenţă:

$$\boxed{P_{yy}\left(e^{j\omega}\right) = P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Puterea medie a semnalului la ieşire.*
- Presupunând în continuare valoarea medie a semnalului nulă,

$$r_{yy}(0) = c_{yy}(0) = \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}\left(e^{j\omega}\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- Utilizând transformate Z,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{yy}(z)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{xx}(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z,$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$$

- În cazul unui sistem cu funcţie de pondere reală, rămâne:

$$\boxed{\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{xx}(z)H(z)H\left(z^{-1}\right)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z,}$$

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- O exprimare temporală se obţine pornind de la $r_{yy} = r_{yx}(k) * h^*(-k)$ care pentru k=0 conduce la

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(l) r_{yx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(l) r_{xx}(l-m) h(m)$$

- deci $\sigma_y^2 = \mathrm{E}\left\{|y(n)|^2\right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}\mathbf{h}$
- unde **h** este vectorul coloană format cu elementele $h(n)$, iar **R** este matricea de autocorelaţie.
- Această exprimare prezintă interes în special în cazul filtrelor cu răspuns finit la impuls, când dimensiunile lui **h** şi **R** sunt finite.

6.2 Răspunsul sistemelor discrete în timp la procese aleatoare

- *Aplicaţie în cazul unui zgomot alb* cu valoare medie nulă m_x=0 şi varianţă (putere medie) σ_x^2;

$$r_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \qquad\qquad P_{xx}(z) = \sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \sigma_x^2 \oint_C H(z) H\left(z^{-1}\right) z^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \sigma_x^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \right|^2 \mathrm{d}\omega$$