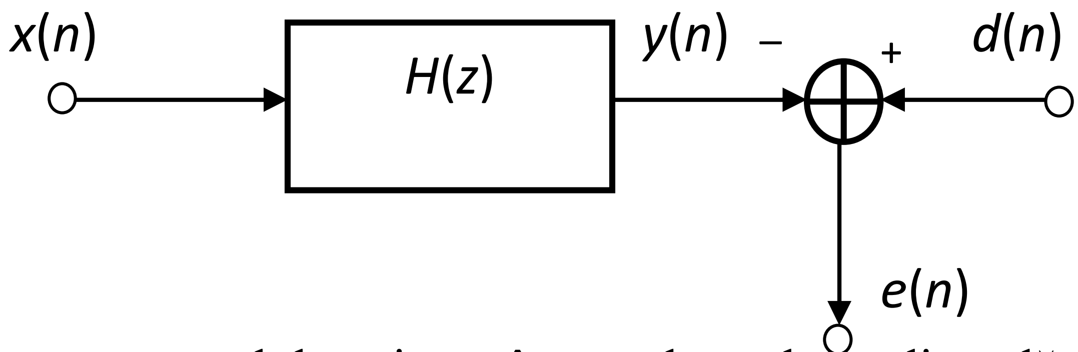
# 3.TEORIA FILTRĂRII LINIARE OPTIMALE

# 3.1 CRITERIUL DE OPTIMIZARE

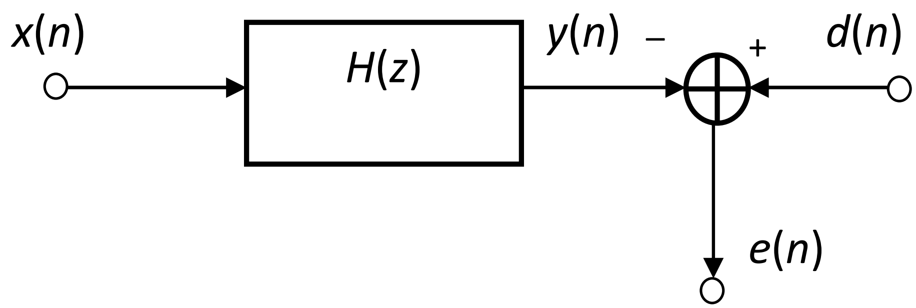



Se cunoaşte semnalul staţionar în sens larg, de medie nulă

$$x(n) = \underbrace{d(n)}_{\text{Semnal util}} + \underbrace{v(n)}_{\text{Perturbaţie}},$$

Dorim un filtru $H(z)$ care să extragă semnalul util.

# 3.1 CRITERIUL DE OPTIMIZARE



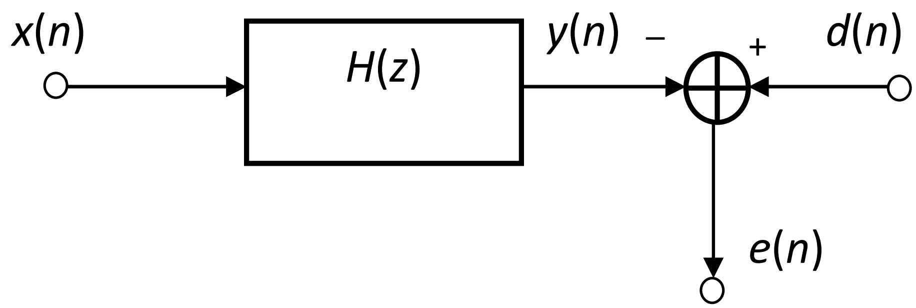

$$h(n) = w_n^*, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$y(n) = (h * x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* x(n-k), \quad n = 0,1,\ldots.$$

şi

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* x(n-k)$$

# 3.1 CRITERIUL DE OPTIMIZARE




Cu notaţiile

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), \ldots, x(n - N + 1)]^T;$$

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}]^T;$$

$$e(n) = d(n) - \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{x}(n)$$

## 3.1 CRITERIUL DE OPTIMIZARE

Funcţie cost: ***eroarea medie pătratică***

$$J = \mathrm{E}\left\{ |e(n)|^2 \right\} = \mathrm{E}\left\{ e(n)e^*(n) \right\}$$

$$J = E\{[d(n) - \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{x}(n)][d^*(n) - \boldsymbol{x}^H(n)\boldsymbol{w}]\}$$
$$J = E\{d(n)d^*(n)\} + \boldsymbol{w}^H E\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)\}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^H E\{\boldsymbol{x}(n)d^*(n)\} -$$
$$-E\{d(n)\boldsymbol{x}^H(n)\}\boldsymbol{w}$$

$E\{d(n)d^*(n)\} = \sigma_d^2$ (puterea semnalului dorit)

$E\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)\} = \boldsymbol{R}$ (matricea de autocorelaţie)

$E\{\boldsymbol{x}(n)d^*(n)\} = \boldsymbol{p}$ (vectorul corelaţiei între semnalul de intrare şi semnalul dorit)

$$\mathbf{p} = \left[r_{xd}(0), r_{xd}(-1), \ldots, r_{xd}(-N+1)\right]^T;$$

# 3.1 CRITERIUL DE OPTIMIZARE

$$J = E\{d(n)d^*(n)\} + \boldsymbol{w}^H E\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)\}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^H E\{\boldsymbol{x}(n)d^*(n)\} - E\{d(n)\boldsymbol{x}^H(n)\}\boldsymbol{w}$$

$$\boxed{J = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^H\mathbf{p} - \mathbf{p}^H\mathbf{w} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}}$$

# 3.2 ECUAŢIILE WIENER-HOPF

$J$ - funcţie de gradul doi de variabilele complexe

$w_k = a_k + \mathrm{j} b_k$, $k = 0, ..., N-1$.

$$J_{\min} \;\Rightarrow\; \nabla_{\mathbf{w}^*} J = \mathbf{0}$$

$\nabla J$ - gradientul complex,

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = \left[ \frac{\partial J}{\partial w_0}, \frac{\partial J}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial w_{N-1}} \right]^T = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial J}{\partial a_i} - \mathrm{j} \frac{\partial J}{\partial b_i} \right); \qquad \frac{\partial J}{\partial w_i^*} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial J}{\partial a_i} + \mathrm{j} \frac{\partial J}{\partial b_i} \right)$$

# Minimizarea unei funcții reale de un vector complex

Fie o funcție $f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^*): \mathbb{C}^{2N} \to \mathbb{R}$. Condiția necesară pentru ca funcția să aibă un minim în $\boldsymbol{z}$ este ca gradientul complex să se anuleze $\nabla_{\mathrm{z}^*}\{f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^*)\} = \mathbf{0}$.

Prin definiție

$$\nabla_{\mathbf{z}} f = \left[\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{N-1}}\right]^T$$

$$\nabla_{\mathbf{z}^*} f = \left[\frac{\partial f}{\partial z^*_0}, \frac{\partial f}{\partial z^*_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z^*_{N-1}}\right]^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} - \mathrm{j}\frac{\partial f}{\partial b_i}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial z^*_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} + \mathrm{j}\frac{\partial f}{\partial b_i}\right), z_i = a_i + jb_i$$

Exemple

$$\frac{\partial z_i}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i} - \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left(a_i + jb_i\right) = 1$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial z^*_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left(a_i + jb_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial z^*_i}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i} - \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left(a_i - jb_i\right) = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{z}^* = \mathbf{0}; \quad \nabla_{\mathbf{z}^*}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Observație – **z** și $\mathbf{z}^*$ sunt tratate ca două variabile distincte.

Gradientul în raport **z** al unei cantități ce nu depinde de **z** este nul.

$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{p}^{\mathrm{H}}\mathbf{z}\} = \mathbf{p}^*$ $\qquad$ $\nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{p}^{\mathrm{H}}\mathbf{z}\} = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\sum_{l=0}^{N-1} p_l^*\left(a_l + jb_l\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i} - \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left\{\sum_{l=0}^{N-1} p_l^*\left(a_l + jb_l\right)\right\} = p_i^*$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\sum_{l=0}^{N-1} p_l^*\left(a_l + jb_l\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left\{\sum_{l=0}^{N-1} p_l^*\left(a_l + jb_l\right)\right\} = 0$$

$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{p}\} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{p}\} = \mathbf{p}$

$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{z}\} = (\mathbf{A}\mathbf{z})^*$ $\qquad$ $\nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{z}\} = (\mathbf{A}\mathbf{z})$

Pentru ca punctual staționar respective să fie punct de extrem, hessianul

$$\nabla^2_{\mathbf{zz}^*}\{f\} \begin{cases} > 0 \; pentru \; un \; minim \\ < 0 \; pentru \; un \; maxim \end{cases}$$

unde semnul de inegalitate semnifică ‘*pozitiv semidefinit*’,

respectiv ‘*negativ semidefinit*’.

# 3.2 ECUAŢIILE WIENER-HOPF

$$\frac{\partial}{\partial w_i^*}\left\{\mathbf{w}^H\mathbf{p}+\mathbf{p}^H\mathbf{w}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(a_k-\mathrm{jb_k}\right)r_{xd}\left(-k\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\left(a_k+\mathrm{jb_k}\right)r_{xd}^*\left(-k\right)\right\}=$$

$$=r_{xd}\left(-i\right)$$

$$\nabla\left\{\mathbf{w}^H\mathbf{p}+\mathbf{p}^H\mathbf{w}\right\}=\mathbf{p}$$

# 3.2 ECUAŢIILE WIENER-HOPF

$$\frac{\partial}{\partial w_i^*}\left\{\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_i}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial b_i}\right)\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left(a_k-\mathrm{jb_k}\right)\left(a_l+\mathrm{j}b_l\right)r_{xx}\left(l-k\right)\right\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}w_l r_{xx}\left(l-i\right)$$

$$\nabla\left\{\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}\right\}=\mathbf{R}\mathbf{w};$$

$$\nabla J=-\mathbf{p}+\mathbf{R}\mathbf{w}=\mathbf{0}$$

# 3.2 ECUAŢIILE WIENER-HOPF

Hessianul transformării:

$$\mathbf{H} = \nabla^2_{\mathbf{ww}^*} J = \nabla_{\mathbf{w}}\left(\nabla_{\mathbf{w}^*}\right) = \nabla_{\mathbf{w}}\left(-\mathbf{p} + \mathbf{Rw}\right) = \mathbf{R}$$

Este pozitiv semidefinit, J(**w**) reprezintă o suprafaţă de forma unui paraboloid având un minim $J_{min}$ pentru **w**=$\mathbf{w}_o$ care anulează gradientul

$$\boxed{\mathbf{Rw}_o = \mathbf{p}}$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{N-1} w_{o,l} r_{xx}\left(l-i\right) = r_{xd}(-i), \qquad i = 0,\ldots,N-1}$$

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{w}_o^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w}_o + \mathbf{w}_o^H \mathbf{R} \mathbf{w}_o =$$

$$= \sigma_d^2 - \mathbf{w}_o^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w}_o + \mathbf{w}_o^H \mathbf{p} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{w}_o = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}$$

## 3.3 PRINCIPIUL ORTOGONALITĂŢII

Pentru filtrul optim:

$$y_o(n) = \mathbf{w}_o^H \mathbf{x}(n)$$

$$e_o(n) = d(n) - \mathbf{w}_o^H \mathbf{x}(n)$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)e_o^*(n)\} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)d_o^*(n)\} - \mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}_o\}$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)e_o^*(n)\} = \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)e_o^*(n)\} = \mathbf{0}$$

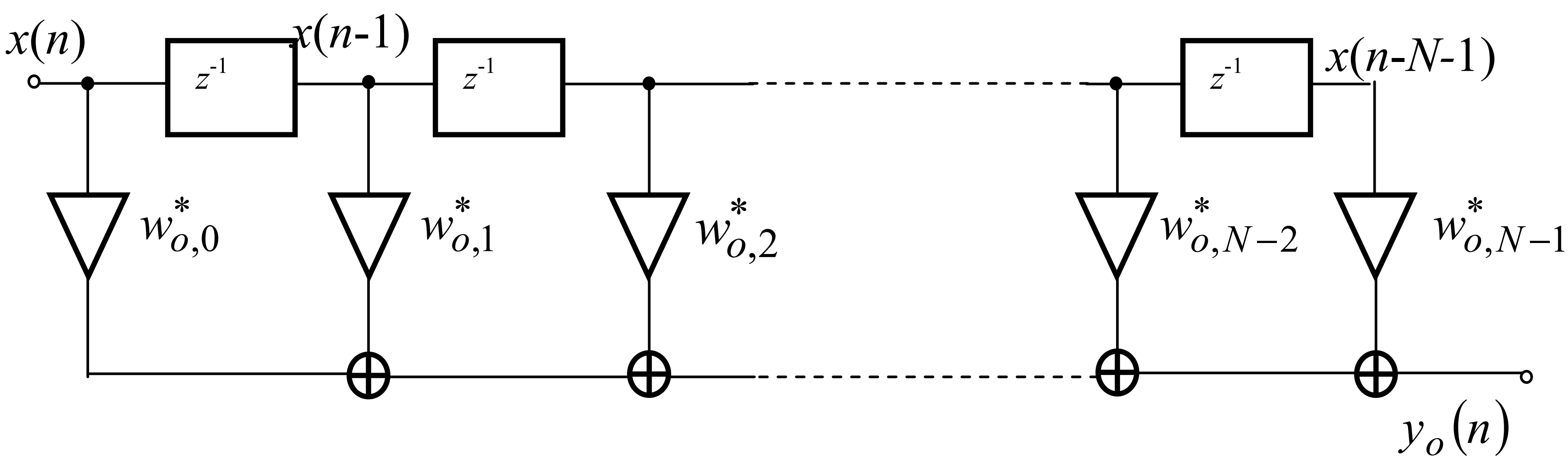
$$\mathrm{E}\{x(n-k)e_o^*(n)\} = 0, \quad k = 0,\ldots,N-1$$

- ***eroarea este ortogonală pe eşantioanele intrării***.

# 3.3 PRINCIPIUL ORTOGONALITĂŢII

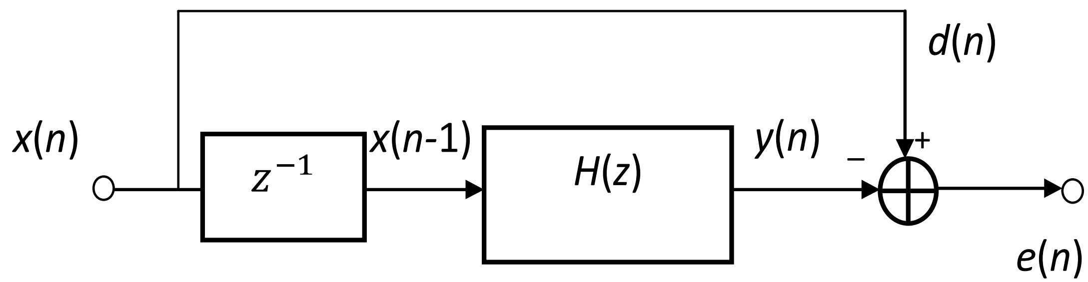
$$\mathrm{E}\{y_o(n)e_o^*(n)\} = 0$$

- ***ieşirea $y_o(n)$ şi eroarea $e_o(n)$ corespunzătoare sunt ortogonale***



# 4. PREDICŢIA LINIARĂ

# 4.1 Predicţia înainte (directă)




$x(n)$ un proces aleator staţionar cu valoare medie nulă.
Se cunosc N eşantioane anterioare

$$x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-N) \;\Rightarrow\; X_{n-1}$$

Pe baza lor se doreşte o estimare a lui $x(n)$:

$$\hat{x}(n \mid X_{n-1}) = \sum_{k=1}^{N} w_k^* x(n-k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n-1),$$

$$\mathbf{x}(n-1) = [x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-N)]^T, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_N]^T$$

# 4.1 Predicţia înainte (directă)

***eroarea de predicţie***:

$$e_N^f(n) = x(n) - \hat{x}(n|X_{n-1})$$

***Puterea erorii de predicţie***:

$$P_N = \mathrm{E}\left\{\left|e_N^f(n)\right|^2\right\}.$$

# 4.1 Predicţia înainte (directă)

***Analogii cu problema filtrării optimale***:

$$d(n) \Rightarrow x(n)$$

$$\mathbf{x}(n) \Rightarrow \mathbf{x}(n-1)$$

$$e(n) \Rightarrow e_N^f(n)$$

$$J_{\min} \Rightarrow P_N$$

$$\mathbf{R} \Rightarrow \mathrm{E}\left\{\mathbf{x}(n-1)\mathbf{x}^H(n-1)\right\} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{x}(n-1)x^*(n)\right\} = \left[r_{xx}(-1), r_{xx}(-2), \ldots, r_{xx}(-N)\right]^T$$

$$\sigma_d^2 = \mathrm{E}\left\{|x(n)|^2\right\} = \sigma_x^2 = r_{xx}(0)$$

## 4.1 Predicţia înainte (directă)

Se pot prelua direct următoarele rezultate:

- ***ecuaţia Wiener-Hopf*** (***ecuaţia normală***)

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{r} \quad \text{sau} \quad \mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$$

- ***principiul ortogonalităţii***

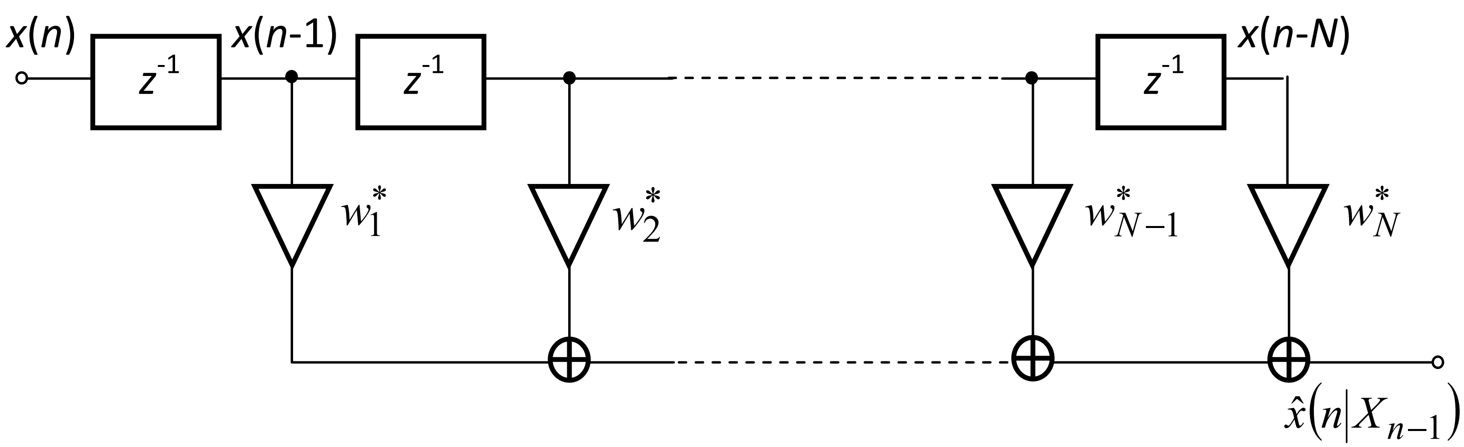
$$\mathrm{E}\left\{\mathbf{x}(n-1)e_N^{f*}(n)\right\} = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\left\{\hat{x}\left(n \middle| X_{n-1}\right)e_N^{f*}(n)\right\} = 0$$

- ***Expresia puterii erorii de predicţie***, în cazul coeficienţilor optimi,

$$P_N = \sigma_x^2 - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_o = r_{xx}(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_o = r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_o$$

# 4.1 Predicţia înainte (directă)

***Filtrul predictor:***



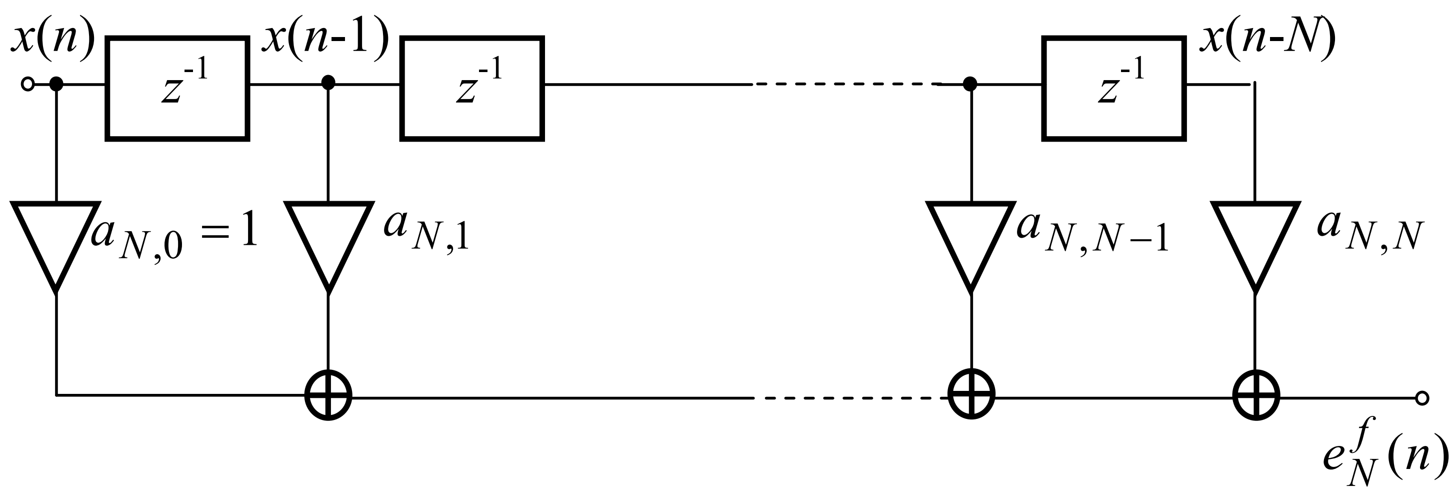
# 4.1 Predicţia înainte (directă)

***Filtrul erorii de predicţie inainte***

$$e_N^f(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} w_{o,k}^* x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_{N,k} x(n-k)$$

unde

$$a_{N,k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -w_{o,k}^*, & k = 1,\dots,N \end{cases}$$



# 4.1 Predicţia înainte (directă)

***Ecuaţiile Wiener-Hopf extinse***:

$$\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{w}_o = 0$$
$$r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_o = P_N$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_N \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

# 4.1 Predicţia înainte (directă)

$$\begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_N \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Sau

$$\mathbf{R}_{N+1}\mathbf{a}_N^* = \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \end{bmatrix}$$

unde

$$\mathbf{a}_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}_o^* \end{bmatrix}$$

şi $\mathbf{R}_{N+1}$ este matricea de autocorelaţie extinsă, de dimensiuni $(N+1)$x$(N+1)$

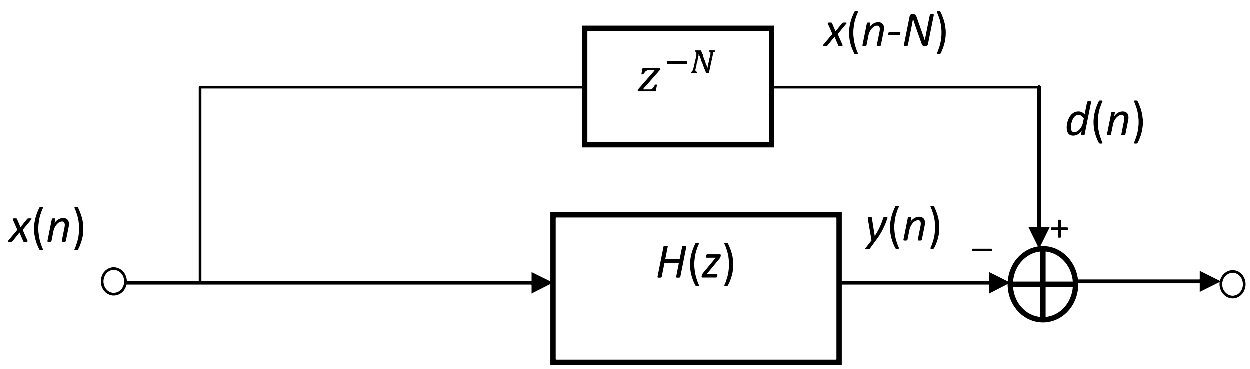
# 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Se cunosc:***

$$x(n), x(n-1), \cdots, x(n-N+1) \;\Rightarrow\; X_n$$

***Se doreşte un estimat al lui***

$$x(n-N)$$



# 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

$$\hat{x}(n-N|X_n)=\sum_{k=1}^{N} g_k^* x(n-k+1)$$

***Eroarea de predicţie:***

$$e_N^b(n)=x(n-N)-\hat{x}(n-N|X_n)$$

$$\mathbf{g}=[g_1, g_2, \ldots, g_N]^T$$

***Puterea erorii de predicţie***

$$P_N=\mathrm{E}\left\{\left|e_N^b(n)\right|^2\right\}$$

## 4.2. PREDICȚIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Analogii cu problema filtrării optimale:***

$$d(n) \Rightarrow x(n-N)$$

$$\mathbf{w}_o \Rightarrow \mathbf{g}_o$$

$$e(n) \Rightarrow e_N^b(n)$$

$$J_{\min} \Rightarrow P_N$$

$$\mathbf{p} \;\Rightarrow\; \mathbf{r}^{B*} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)x^*(n-N)\} = [r_{xx}(N), \, r_{xx}(N-1), \ldots, r_{xx}(1)]^T.$$

# 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Se preiau:***

- Ecuaţia normală $$\mathbf{R}\mathbf{g} = \mathbf{r}^{B*}$$

- Puterea erorii de predicţie $$P_N = r(0) - \mathbf{r}^{BT}\mathbf{g}$$

- Principiul ortogonalităţii $$\mathrm{E}\left\{\mathbf{x}(n) e_N^{b*}(n)\right\} = \mathbf{0}$$

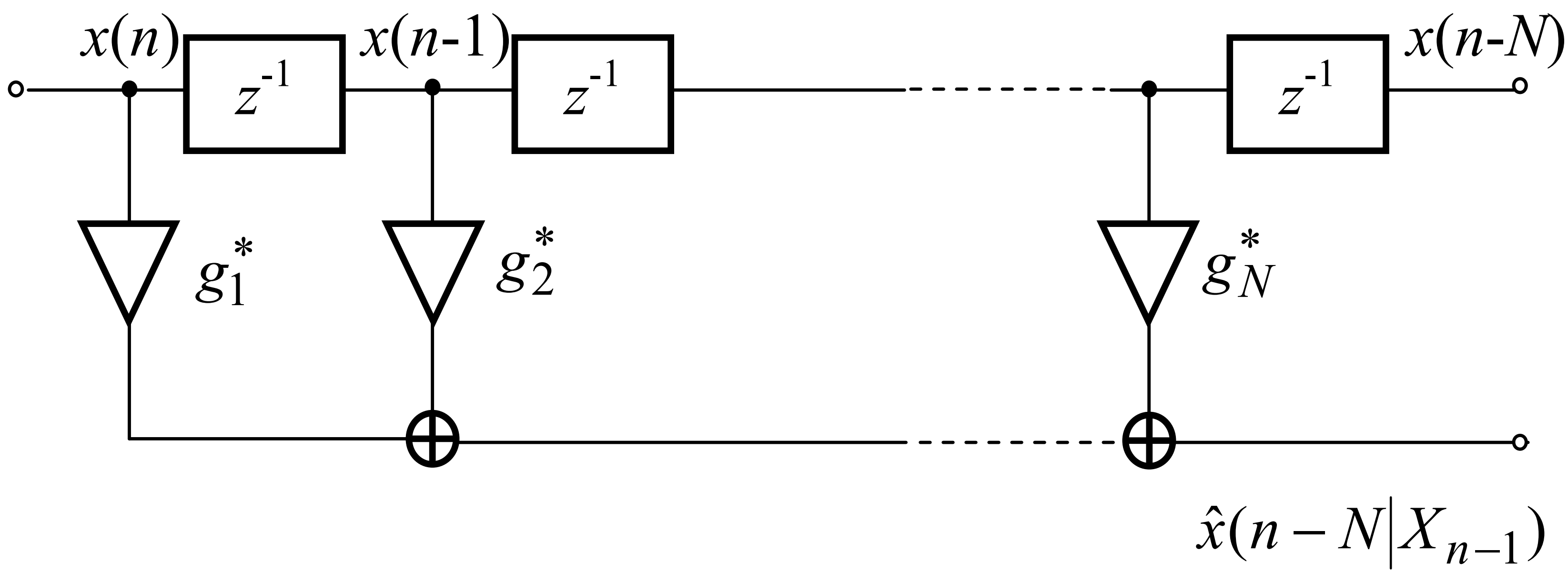
sau

$$\mathrm{E}\left\{x(n-k) e_N^{b*}(n)\right\} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

# 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Filtrul ce realizează predicţia inversă***

$$\hat{x}\left(n-N\middle|X_n\right)=\sum_{k=1}^{N}g_k^*x\left(n-k+1\right)$$



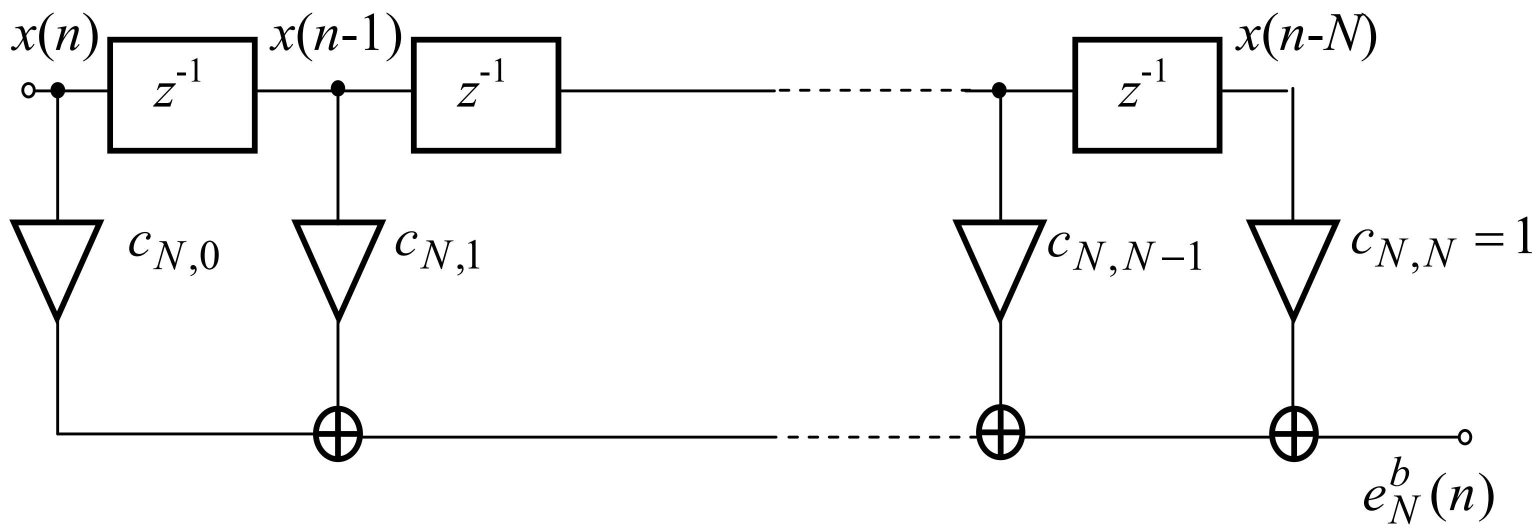
# 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Filtrul erorii de predicţie înapoi*.**

$$e_N^b(n) = x(n-N) - \sum_{k=1}^{N} g_k^* x(n-k+1) = \sum_{k=0}^{N} c_{N,k}\, x(n-k)$$

unde

$$c_{N,k} = \begin{cases} -g_{k+1}^* & k = 0,\dots,N-1 \\ 1, & k = N \end{cases}$$



## 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Ecuaţiile Wiener-Hopf extinse pentru predicţia inversă***

$$-\mathbf{R}\mathbf{g}+\mathbf{r}^{B*}=\mathbf{0}$$
$$r(0)-\mathbf{r}^{BT}\mathbf{g}=P_N$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r}^{B*} \\ \mathbf{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\mathbf{g} \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_N \end{bmatrix}$$

sau

$$\boxed{\mathbf{R}_{N+1}\mathbf{c}_N^{*}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_N \end{bmatrix}}$$

unde

$$\boxed{\mathbf{c}_N=\begin{bmatrix} -\mathbf{g}^{*} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

## 4.2. PREDICŢIA ÎNAPOI (INVERSĂ)

***Relaţie între coeficienţii filtrelor de predicţie directă şi inversă***

$$\mathbf{R}\mathbf{g} = \mathbf{r}^{B*} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}^T\mathbf{g}^B = \mathbf{r}^* \;\Rightarrow\; \mathbf{R}^H\mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}\mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g}^{B*} = \mathbf{w} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w}^{B*} = \mathbf{g}$$

sau

$$g_k = w^*_{N-k+1}, \quad k = 1,\dots,N$$

$$\mathbf{c}_{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}^B \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_N = \mathbf{a}_N^{B*} \qquad c$$

sau

$$c_{N,k} = a^*_{N,N-k}, \quad k = 0,\dots,N$$

$$\mathbf{r}^{BT}\mathbf{g} = \mathbf{r}^T\mathbf{g}^B = \left(\mathbf{r}^T\mathbf{g}^B\right)^* = \mathbf{r}^H\mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r}^H\mathbf{w} \;\Rightarrow$$

puterile erorilor de predicţie sunt identice în cele două cazuri.

## 4.3 ALGORITMI EFICIENŢI DE REZOLVARE A ECUAŢIEI NORMALE A FILTRĂRII LINIARE OPTIMALE

Ecuaţia normală este un sistem $N \times N$
Rezolvat prin metoda Gauss rezultă o complexitate de tip $O(N^3)$
*Algoritm rapid* ar însemna $O(N)$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

Vom căuta o constantă $k_m$, astfel încât să fie posibilă o relaţie de forma:

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

sau

$$\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_m^* \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B} \end{bmatrix}$$

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^* , \qquad k = 0,\ldots,m$$

$$a_{m-1,0} = 1, \qquad a_{m-1,m} = 0$$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$$\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_m^* \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1}\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} P_m \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m & \mathbf{r}_m^{B*} \\ \mathbf{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m & \mathbf{r}_m^{B*} \\ \mathbf{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m\mathbf{a}_{m-1}^* \\ \mathbf{r}_m^{BT}\mathbf{a}_{m-1}^* \end{bmatrix}$$

# 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$$= \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1}\begin{bmatrix} \mathbf{a}^*_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m \mathbf{a}^*_{m-1} \\ \mathbf{r}_m^{BT} \mathbf{a}^*_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$= \Delta_{m-1}$$

Notăm

$$\Delta_{m-1} = \mathbf{r}_m^{BT} \mathbf{a}^*_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a^*_{m-1,k}\, r(k-m)$$

şi având în vedere forma extinsă a ecuaţiilor Wiener-Hopf pentru predictorul de ordin $m$-1,

$$\mathbf{R}_{m+1}\begin{bmatrix} \mathbf{a}^*_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix}$$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$$\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_m^* \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}_m^H \\ \mathbf{r}_m & \mathbf{R}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_m^H \mathbf{a}_{m-1}^B \\ \mathbf{R}_m \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_m^H \mathbf{a}_{m-1}^B = \Delta_{m-1}^*, \quad \mathbf{R}_m \mathbf{a}_{m-1}^B = \mathbf{R}_m \mathbf{c}_{m-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$$\begin{bmatrix} P_m \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix} + k_m^* \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$P_m = P_{m-1} + k_m^* \Delta_{m-1}^* ; \quad 0 = \Delta_{m-1} + k_m^* P_{m-1}$$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$$P_m = P_{m-1} + k_m^* \Delta_{m-1}^* ; \quad 0 = \Delta_{m-1} + k_m^* P_{m-1}$$

$$P_m = P_{m-1}\left(1 - \left|k_m\right|^2\right)$$

$$P_m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|k_m\right| \leq 1$$

$$e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n); \qquad P_0 = r(0)$$

$$P_N = P_0 \prod_{m=1}^{N}\left(1 - \left|k_m\right|^2\right)$$

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

Observaţii

- Puterea erorii de predicţie scade o dată cu creşterea ordinului predictorului.
- Coeficienţii $k_m$ - *coeficienţi de reflexie*

Pentru $k=m$,

$$k_m = a_{m,m}$$

- Se poate uşor arăta, folosind definiţiile şi principiul ortogonalităţii, că:

$$\Delta_{m-1} = \mathrm{E}\left\{e_{m-1}^{b}(n-1)e_{m-1}^{f*}(n)\right\}$$

unde $e_{m-1}^{f}(n)$ - răspunsul filtrului erorii de predicţie directă de ordinul $m$-1, pentru secvenţa de intrare $x(n), x(n-1), \ldots, x(n-m+1)$,

$e_{m-1}^{b}(n-1)$ - răspunsul filtrului erorii de predicţie inversă, de ordinul m-1, la secvenţa $x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-m)$.

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

Observaţii

- Având în vedere că:

$$e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n)$$

$$\Delta_0 = \mathrm{E}\left\{e_0^b(n-1)e_0^{f*}(n)\right\} = \mathrm{E}\left\{x(n-1)x^*(n)\right\} = r(-1) = r^*(1)$$

- Cunoscând $\Delta_o$ şi $P_o$ se pot calcula, folosind relaţiile de recurenţă

$$k_1 = -\frac{\Delta_0^*}{P_0} = -\frac{r(1)}{r(0)}; \quad P_1 = r(0) - \frac{|r(1)|^2}{r(0)}$$

### 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

$P_0 = r(0);\ \Delta_0 = r^*(1)$

for $m = 1:1:N$

$$k_m = -\frac{\Delta_{m-1}^*}{P_{m-1}}$$

$$P_m = P_{m-1}\left(1 - |k_m|^2\right)$$

for $k = 1:1:m$

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^*$$

end

$$\Delta_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k}^* r(k-m-1)$$

end

## 4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin
## Complexitatea aritmetică a algoritmului

În pasul $m$ al algoritmului trebuie efectuate:
- o împărţire;
- $2m+1$ înmulţiri (două pentru calculul lui $P_m$, $m$-1 pentru reactualizarea coeficienţilor $a_{m,k}$, şi $m$ pentru calculul lui $\Delta_m$ ).
- $2m$ adunări.

Pentru efectuarea întregului algoritm, rezultă

$$\sum_{m=1}^{N}(2m+2) = N^2 + 3N$$

înmulţiri / împărţiri şi

$$\sum_{m=1}^{N}(2m) = N^2 + N$$

Dacă se utilizează o singură unitate aritmetică şi aceasta efectuează o operaţie aritmetică într-o unitate de timp, timpul total de calcul este $O(N^2)$ .

Când se dispune de $N$ unităţi aritmetice ce pot lucra în paralel timpul de calcul este $O\left(N\log_2 N\right)$

## 4.3.2 Algoritmul Schur -
### definirea funcţiilor de tip ‘*f*’

Răspunsul filtrului erorii de predicţie de ordin *m* la secvenţa de autocorelaţie

$$y_m^f(i) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} r_{xx}(i-k) = a_{m,i} * r_{xx}(i)$$

Conform ecuaţiei Wiener_Hopf pentru predictorul de ordin *m*

$$\mathbf{R}_{m+1}\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} P_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Elementele matricei de autocorelaţie sunt

$$R_{i,k} = r_{xx}(k-i), \quad k,i = 0,1,\cdots,m$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur –

**definirea funcţiilor de tip '*f*'**

$$\sum_{k=0}^{m} R_{i,k}\, a_{m,k}^{*} = 0, \quad \rightarrow \sum_{k=0}^{m} a_{m,k}^{*} r_{xx}(k-i) = 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_{m,k} r_{xx}(i-k) = 0, \quad i = 1,\dots,m$$

$$y_m^f(i) = 0, \quad i = 1,\dots,m$$

# 4.3.2 Algoritmul Schur –
## definirea funcţiilor de tip '*f*'

$$\sum_{k=0}^{m} R_{0,k}\, a^{*}_{m,k} = P_m\,, \quad \rightarrow \sum_{k=0}^{m} a^{*}_{m,k} r_{xx}(k) = P_m, \quad i = 0$$

rezultă că

$$y_m^f(0) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} r_{xx}(-k) = P_m$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur –

### definirea funcţiilor de tip '*b*'

Pornind de la predicţia inversă

$$y_m^b(i) = \sum_{k=0}^{m} c_{m,k} r_{xx}(i-k) = c_{m,i} * r_{xx}(i)$$

Dar

$$c_{m,k} = a^*_{m,m-k}$$

aşa încât

$$y_m^b(i) = y_m^{f*}(m-i)$$

$$y_m^b(i) = 0, \quad i = 0,\dots,m-1$$

$$y_m^b(m) = P_m$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur –

**relaţii de recurenţă**

Din relaţiile

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a^*_{m-1,m-k} = a_{m-1,k} + k_m c_{m-1,k-1}$$

$$c_{m,k} = k^*_m a_{m-1,k} + c_{m-1,k-1}$$

se obţin nişte relaţii de recurenţă asemănătoare pentru aceste funcţii:

$$y^f_m(i) = y^f_{m-1}(i) + k_m y^b_{m-1}(i-1)$$

$$y^b_m(i) = k^*_m y^f_{m-1}(i) + y^b_{m-1}(i-1)$$

cu condiţiile iniţiale:

$$y^f_0(i) = y^b_0(i) = r_{xx}(i)$$

# 4.3.2 Algoritmul Schur – coeficientul de reflexie

În particular

$$y_m^f(m) = 0 \;\Rightarrow\; y_{m-1}^f(m) + k_m y_{m-1}^b(m-1) = 0$$

de unde

$$k_m = -\frac{y_{m-1}^f(m)}{y_{m-1}^b(m-1)}$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur

for $k = 0 : N$

$$y_0^f(k) = y_0^b(k) = r_{xx}(k)$$

end

for $m = 1 : N$

$$k_m = -\frac{y_{m-1}^f(m)}{y_{m-1}^b(m-1)}$$

for $i = m+1 : N$

$$y_m^f(i) = y_{m-1}^f(i) + k_m y_{m-1}^b(i-1)$$

end

for $i = m : N$

$$y_m^b(i) = k_m^* y_{m-1}^f(i) + y_{m-1}^b(i-1)$$

end

end

$$P_N = y_N^b(N)$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur –
### complexitate aritmetică

În pasul m se efectuează:
o împărţire, pentru calculul lui $k_m$;
$N$-$m$ înmulţiri şi $N$-$m$ adunări, în primul ciclu după $i$;
$N$-$m$+1 înmulţiri şi $N$-$m$+1 adunări, în al doilea ciclu după $i$.
Rezultă un număr de $2N$-$2m$+2 înmulţiri / împărţiri şi $2N$-$2m$+1 adunări, deci în total

$$\sum_{m=1}^{N}(2N-2m+2)=N^2+N$$

înmulţiri / împărţiri şi

$$\sum_{m=1}^{N}(2N-2m+1)=N^2$$

adunări.

## 4.3.2 Algoritmul Schur –
### Modalitate practică de calcul

Iniţializarea algoritmului. Se constituie “matricea generatoare”

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & y_0^f(1) & \cdots & y_0^f(N) \\ y_0^b(0) & y_0^b(1) & \cdots & y_0^b(N) \end{bmatrix}$$

sau

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \ldots & r_{xx}(N) \\ r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \ldots & r_{xx}(N) \end{bmatrix}$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur – Modalitate practică de calcul

Prin deplasarea spre dreapta cu o unitate a liniei a doua se obţine

$$\mathbf{G}_0' = \begin{bmatrix} 0 & y_0^f(1) & \cdots & y_0^f(N) \\ 0 & y_0^b(0) & \cdots & y_0^b(N-1) \end{bmatrix}$$

sau

$$\mathbf{G'}_0 = \begin{bmatrix} 0 & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \cdots & r_{xx}(N) \\ 0 & r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Raportul elementelor coloanei a doua, cu semnul schimbat, determină primul coeficient de reflexie, $k_1$ .

$$k_1 = -\frac{y_0^f(1)}{y_0^b(0)}$$

## 4.3.2 Algoritmul Schur –
## Modalitate practică de calcul

Se constituie matricea

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ k_1^* & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculează

$$\mathbf{K}_1\mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ k_1^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y_0^f(1) & \cdots & y_0^f(N) \\ 0 & y_0^b(0) & \cdots & y_0^b(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{K}_1\mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_1^f(2) & \dots & y_1^f(N) \\ 0 & y_1^b(1) & y_1^b(2) & \dots & y_1^b(N) \end{bmatrix}$$

unde s-au avut în vedere relaţiile de recurenţă şi faptul că $y_1^f(1) = 0$.

## 4.3.2 Algoritmul Schur –
### Modalitate practică de calcul

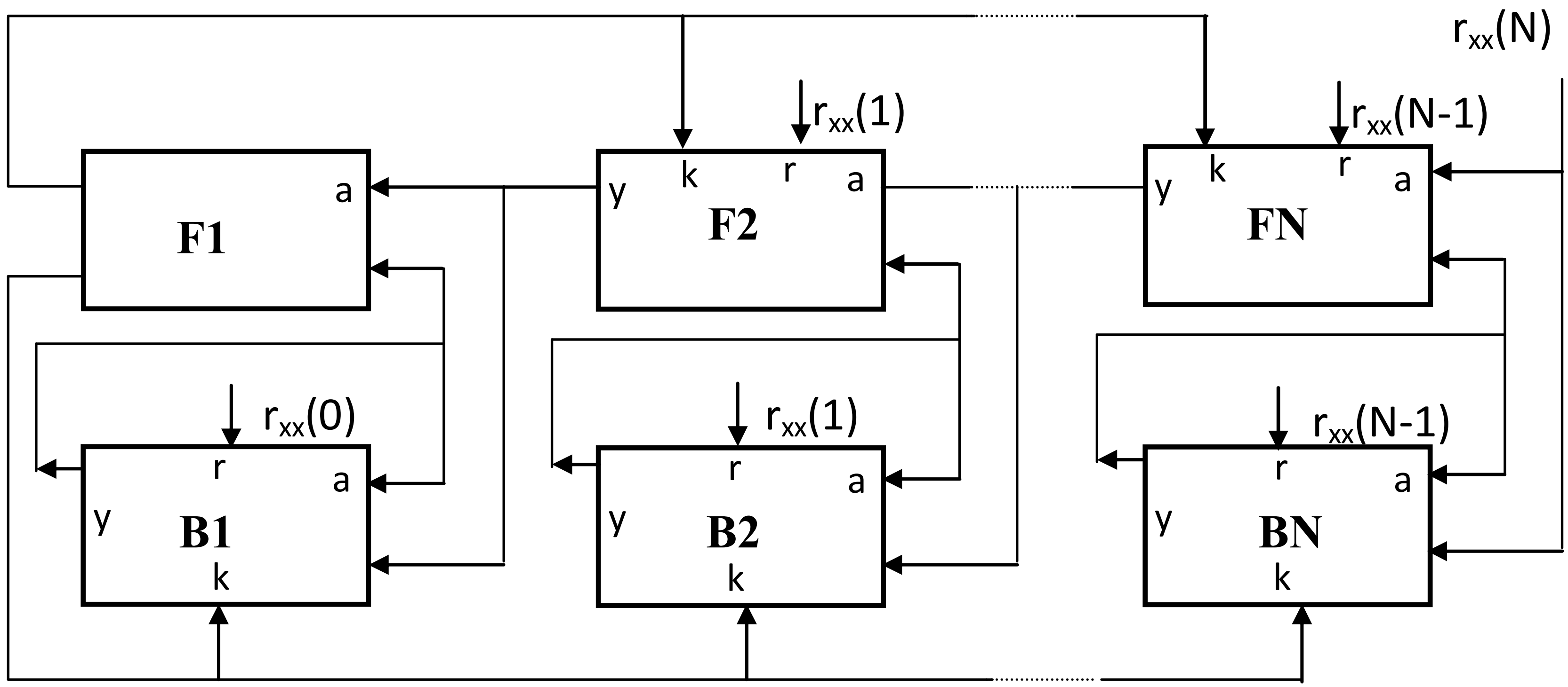
În continuare se repetă ultimele trei operaţii, deci în pasul $m$:

- Se formează $\mathbf{G}'_m$ din $\mathbf{G}_m$ prin deplasarea spre dreapta cu o poziţie a liniei a doua.
- Se calculează $k_{m+1}$ ca raport cu semnul schimbat a elementelor coloanei $m+2$ şi se formează matricea $\mathbf{K}_{m+1}$.
- Se calculează

$$\mathbf{G}_{m+1} = \mathbf{K}_{m+1}\mathbf{G}'_m$$

Procedeul se reia până se calculează toţi coeficienţii de reflexie.

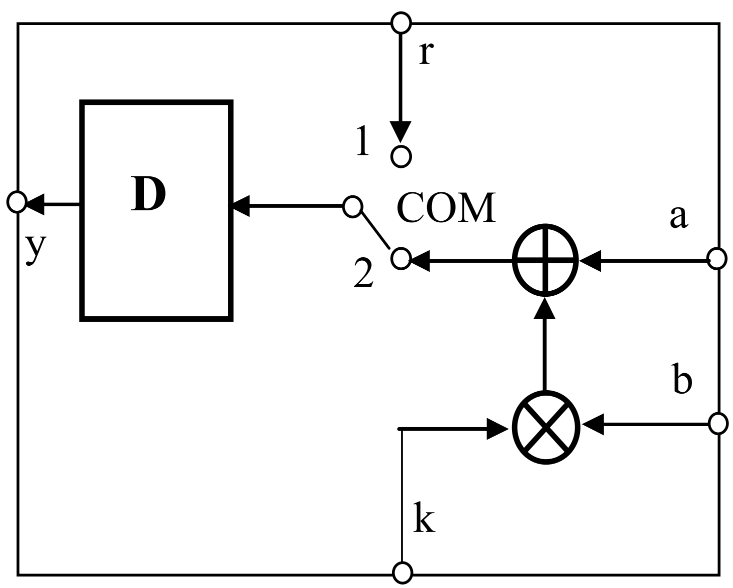
# 4.3.2 Algoritmul Schur –
## Variantă paralel de implementare a algoritmului Schur



## 4.3.2 Algoritmul Schur –

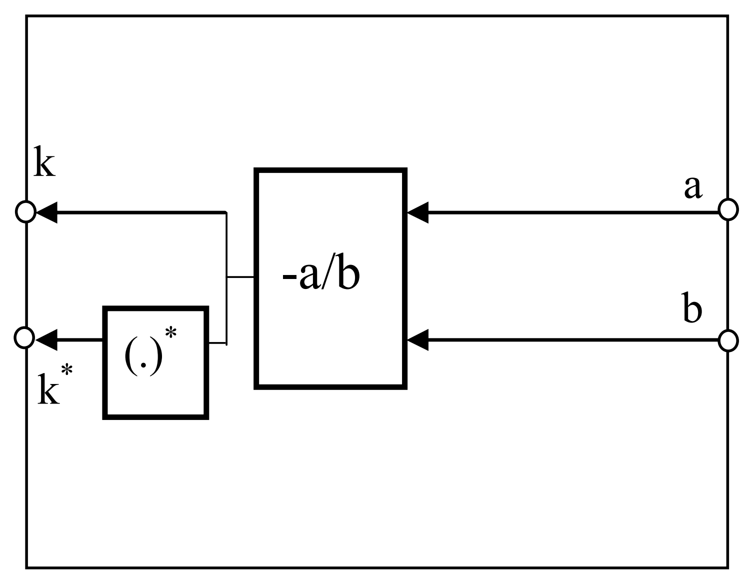
### Variantă paralel de implementare a algoritmului Schur

F2,…,FN,B1,…,BN




a.

F1




b.

## 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

### 4.4.1 Proprietăţi ale filtrelor erorii de predicţie

Vom nota funcţiile de transfer ale filtrelor erorii de predicţie directă şi inversă de ordinul m cu:

$$H_m^f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} z^{-k}; \quad H_m^b(z) = \sum_{k=0}^{m} c_{m,k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{m} a_{m,m-k}^{*} z^{-k}$$

1) Între funcţiile de transfer ale celor două filtre există relaţia

$$H_m^b(z) = z^{-m} H_m^{f*}\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

2) ***Caracteristicile amplitudine-frecvenţă*** ale celor două filtre sunt identice.

$$H_m^b\left(e^{j\omega}\right) = e^{-jm\omega} H_m^{f*}\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow \left|H_m^b\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H_m^f\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE
## 4.4.1 Proprietăţi ale filtrelor erorii de predicţie

3) ***Relaţie de recurenţă***. Având în vedere formulele

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a^*_{m-1,m-k}\,, \qquad k = 0,\ldots,m$$

rezultă:

$$H_m^f(z) = H_{m-1}^f(z) + k_m z^{-1} H_{m-1}^b(z)$$

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

## 4.4.1 Proprietăţi ale filtrelor erorii de predicţie

4) ***Filtrul erorii de predicţie directă este de fază minimă***. Pentru demonstraţie vom avea în vedere faptul că $|k_m|<1$, ceea ce, ţinând seama şi de proprietatea 2 conduce la:

$$\left|k_m z^{-1} H_{m-1}^{b}(z)\right| < \left|H_{m-1}^{b}(z)\right| = \left|H_{m-1}^{f}(z)\right| \quad \text{pe} \quad |z| = 1$$

***Teorema lui Rouché*:**

Dacă două funcţii $F(z)$, $G(z)$, sunt analitice pe conturul C din planul z şi în interiorul conturului, şi $|G(z)| < |F(z)|$ pe contur, atunci funcţia $F(z)+G(z)$ are acelaşi număr de zerouri în interiorul conturului C ca şi $F(z)$.

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

## 4.4.1 Proprietăţi ale filtrelor erorii de predicţie

Fie conturul C cercul $|z|=1$ şi vom aplica teorema aceasta pentru funcţiile:

$$F(z)=H_{m-1}^{f}(z),\ \ G(z)=k_m z^{-1} H_{m-1}^{b}(z)$$

C în sens direct trigonometric $\Rightarrow\ \operatorname{int}\{C\}\ =\ \{|z|<1\}$

C în sens invers trigonometric $\Rightarrow\ \operatorname{int}\{C\}\ =\ \{|z|>1\}$

Conform teoremei enunţate, dacă $H_{m-1}^{f}(z)$ nu are zerouri în $|z|>1$,

de aceeaşi proprietate se bucură şi $H_m^f(z)$. Cum $H_0^f(z)=1$, rezultă

prin inducţie completă că $H_m^f(z)$ nu are zerouri în afara cercului $|z|=1$.

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

## 4.4.1 Proprietăţi ale filtrelor erorii de predicţie

5) ***Filtrul erorii de predicţie inversă este de fază maximă*** (are toate zerourile în exteriorul cercului $|z|=1$).

Dacă se exprimă $H_m^f(z)$ sub forma

$$H_m^f(z) = \prod_{i=1}^{m}\left(1 - z_i z^{-1}\right), \qquad |z_i| < 1$$

având în vedere proprietatea 1, rezultă

$$H_m^b(z) = z^{-m}\prod_{i=1}^{m}\left(1 - z_i^* z\right) = \prod_{i=1}^{m}\left(z^{-1} - z_i^*\right)$$

Nulurile acestei funcţii de transfer sunt de forma $1/z_i^*$, $i=1,\ldots,m$, şi sunt evident situate în $|z|>1$, simetric faţă de $z_i$ în raport cu cercul $|z|=1$.

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICȚIE

## 4.4.2 Forma "latice" de realizare a filtrului erorii de predicție

***Relații de recurență pentru eroarea de predicție***

$$e_m^f(n) = \mathbf{a}_m^T \mathbf{x}_{m+1}(n) = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{x}_{m+1}(n) =$$

$$= \left[\mathbf{a}_{m-1}^T, 0\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(n) \\ x(n-m) \end{bmatrix} + k_m \left[0, \mathbf{a}_{m-1}^{BH}\right] \begin{bmatrix} x(n) \\ \mathbf{x}_m(n-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{a}_{m-1}^T \mathbf{x}_m(n) + k_m \boxed{\mathbf{a}_{m-1}^{BH} \mathbf{x}_m(n-1)}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_{m-1}^{BH} \mathbf{x}_m(n-1) = \mathbf{c}_{m-1}^T \mathbf{x}_m(n-1) = e_{m-1}^b(n-1)}$$

$$e_m^f(n) = e_{m-1}^f(n) + k_m e_{m-1}^b(n-1)$$

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

## 4.4.2 Forma "latice" de realizare a filtrului erorii de predicţie

În mod asemănător se găseşte:

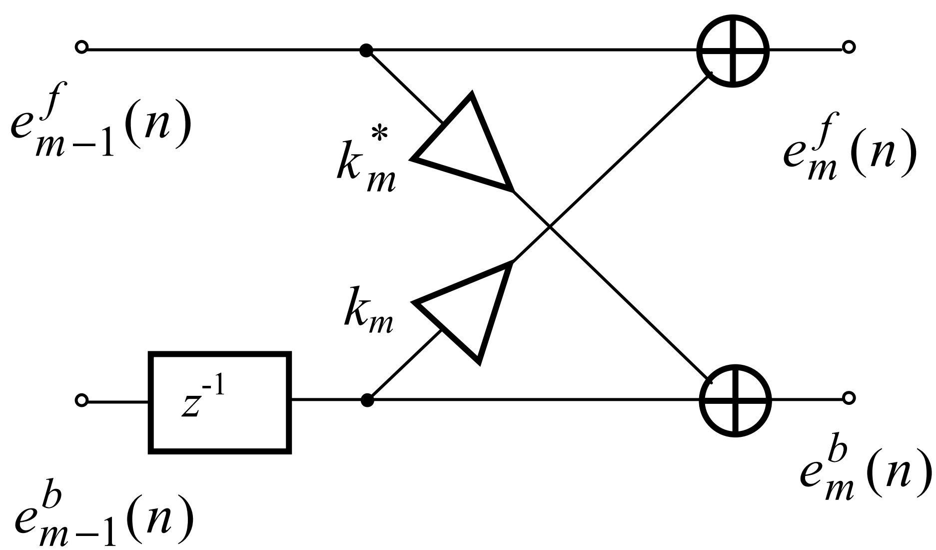
$$e_m^b(n) = e_{m-1}^b(n-1) + k_m^* e_{m-1}^f(n-1)$$

Cele două relaţii pot fi grupate

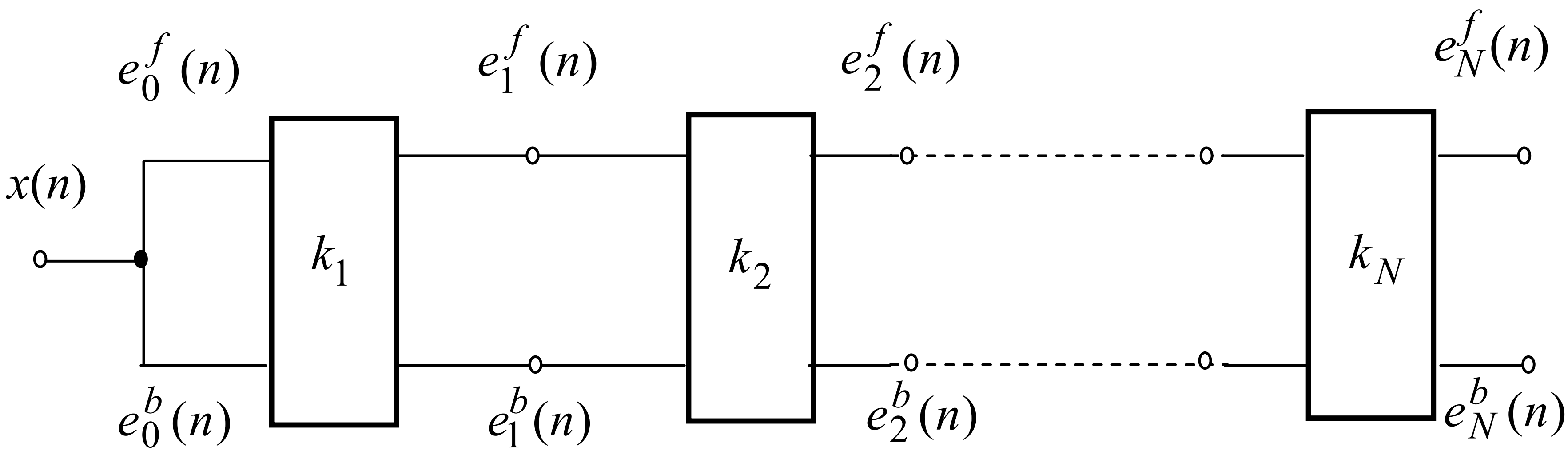
$$\begin{bmatrix} e_m^f(n) \\ e_m^b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m \\ k_m^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{m-1}^f(n) \\ e_{m-1}^b(n-1) \end{bmatrix}$$

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICȚIE

$$\begin{bmatrix} e_m^f(n) \\ e_m^b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m \\ k_m^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{m-1}^f(n) \\ e_{m-1}^b(n-1) \end{bmatrix}$$



# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICȚIE




$e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n)$ - intrarea filtrului

## 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

Se poate pune problema calculului coeficienţilor $k_k$, cunoscând $a_{N,1},...,a_{N,N}$. Pentru aceasta vom porni de la ecuaţia:

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a^*_{m-1,m-k}, \qquad k = 0,1,...,m$$

căreia îi vom alătura ecuaţia obţinută din aceasta prin conjugare complexă şi înlocuind $k$ cu $m$-$k$. Rezultă sistemul:

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a^*_{m-1,m-k}$$

$$a^*_{m,m-k} = k^*_m a_{m-1,k} + a^*_{m-1,m-k}$$

din care se calculează $a_{m-1,k}$,

$$a_{m-1,k} = \frac{a_{m,k} - k_m a^*_{m,m-k}}{1-|k_m|^2} = \frac{a_{m,k} - a_{m,m} a^*_{m,m-k}}{1-|a_{m,m}|^2}$$

## 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

Cunoscând setul de coeficienţi corespunzători predictorului de ordin $N$, $\{a_{N,k}\}$, se trece, cu formula de mai sus, la cei corespunzători predictorului de ordin $N$-1, $\{a_{N-1,k}\}$ şi se determină $k_{m-1}=a_{m-1,m-1}$, şi aşa mai departe până la $N$=1.

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

$$\text{for } j = 0:1:N$$

$$a_{N,j} = a_j$$

$$\text{end}$$

$$\text{for } i = N:\text{-}1:2$$

$$k_i = a_{i,i}$$

$$\text{for } j = 1:1:i\text{-}1$$

$$a_{i-1,j} = \frac{a_{i,j} - k_i a^*_{i,i-j}}{1 - \left|k\right|_i^2}$$

$$\text{end}$$

$$\text{end}$$

$$k_1 = a_{1,1}$$

## 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

Cunoscând setul de coeficienţi corespunzători predictorului de ordin $N$, $\{a_{N,k}\}$, se trece, cu formula de mai sus, la cei corespunzători predictorului de ordin $N$-1, $\{a_{N-1,k}\}$ şi se determină $k_{m-1}=a_{m-1,m-1}$, şi aşa mai departe până la $N$=1.

Problema inversă – se cunosc coeficienţii de reflexie ( de exemplu s-au determinat cu alggoritmul Schur) şi se doresc coeficienţii filtrului erorii de predicţie în forma tranversală.

Se pormeşte în sens invers, de la filtrul de ordinul 1, pentru care se cunosc $a_{1,0} = 1,\ \ a_{1,1} = k_1$ şi se măreşte succesiv ordinul.

# 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

$$a_{1,1} = k_1, \quad a_{1,0} = 1$$

$$\text{for } i = 2:1:N$$

$$a_{i,i} = k_i, \quad a_{i,0} = 1$$

$$\text{for } j = 1:1:i\text{-}1$$

$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + k_i a^*_{i-1,i-j}$$

$$\text{end}$$

$$\text{end}$$

$$\text{for } j = 0:1:N$$

$$a_j = a_{N,j}$$

$$\text{end}$$

## 4.4 FILTRELE ERORII DE PREDICŢIE

O proprietate remarcabilă a structurii latice este aceea că se poate mări ordinul predictorului, adăugând pur şi simplu încă o celulă, fără a modifica în rest structura existentă. Faptul că toate celulele au aceeaşi structură este favorabil din punctul de vedere al posibilităţilor de integrare pe scară foarte largă.