ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Poate fi privit ca o extindere a algoritmului NLMS.

Reactualizarea coeficienţilor se face pornind de la minimizarea normei euclidiene a variaţiei

$$\delta \boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n+1) - \boldsymbol{w}(n)$$

cu condiţiile

$$d(n-k) = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}(n+1)x(n-k), \qquad k = 0, \cdots, M-1$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Funcţia cost

$$J(n) = \|\boldsymbol{w}(n+1) - \boldsymbol{w}(n)\|^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{Re}\{\lambda_k^* [d(n-k) - \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}(n+1)x(n-k)]\}$$

Pentru a sistematiza scrierea vom defini următoarele structuri

- Vectorii semnalelor din linia de întârziere a filtrului, pentru cele M momente de timp

$$\boldsymbol{x}(n-k) = [x(n-k), x(n-k-1), \cdots, x(n-k-N+1)]^T, \quad k = 0, \cdots, M-1$$

- Matricea având drept coloane aceşti vectori

$$\boldsymbol{A}^H(n) = [\boldsymbol{x}(n), \boldsymbol{x}(n-1), \cdots, \boldsymbol{x}(n-M+1)]$$

- Vectorul semnalelor dorite

$$\boldsymbol{d}^H(n) = [d(n), d(n-1), \cdots, d(n-M+1)]$$

- Vectorul multiplicatorilor Lagrange

$$\boldsymbol{\lambda}^H = [\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{M-1}]$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Relaţiile de condiţie

$$d(n-k) = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}(n+1)x(n-k), \qquad k = 0, \cdots, M-1$$

$$\boldsymbol{d}(n) = \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)$$

Funcţia cost

$$J(n) = \|\boldsymbol{w}(n+1) - \boldsymbol{w}(n)\|^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{Re}\left\{\lambda_k^*\left[d(n-k) - \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{H}}(n+1)x(n-k)\right]\right\}$$

$$J(n) = \|\boldsymbol{w}(n+1) - \boldsymbol{w}(n)\|^2 + \mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{d}(n) - \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right)^H \boldsymbol{\lambda}\right\}$$

Minimizarea unei funcții reale de variabilă complexă

Teoremă

O funcție $f(\mathbf{z},\mathbf{z}^*): \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$ are direcția de variație maximă dată de gradientul complex $\nabla_{\mathrm{z}^*}\{f(\mathbf{z},\mathbf{z}^*)\}$.

$$\nabla_z J = \left[\frac{\partial J}{\partial z_0}, \frac{\partial J}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial z_{N-1}}\right]^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial a_i} - \mathrm{j}\frac{\partial J}{\partial b_i}\right), \quad \frac{\partial J}{\partial z^*_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial a_i} + \mathrm{j}\frac{\partial J}{\partial b_i}\right), \quad z_i = a_i + b_i$$

$$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\mathbf{z}\} = \mathbf{a}^* \qquad \nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{a}^{\mathrm{H}}\mathbf{z}\} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{a}\} = \mathbf{0} \qquad \nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{a}\} = \mathbf{a}$$

$$\nabla_{\mathrm{z}}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{z}\} = (\mathbf{A}\mathbf{z})^* \qquad \nabla_{\mathrm{z}^*}\{\mathbf{z}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{z}\} = (\mathbf{A}\mathbf{z})$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Minimizarea funcţiei cost

Va trebui deci să anulăm gradientul complex al funcţiei cost calculat în raport cu setul de coeficienţi $\boldsymbol{w}^*(n+1)$. Componentele acestuia sunt

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\{\|\boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)\|^2\} = \nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\left(\boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)\right)\right\}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\{\|\boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)\|^2\} = \boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)$$

deoarece

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\boldsymbol{w}^H(n+1)\boldsymbol{w}(n+1)\right\} = \boldsymbol{w}(n+1)$$

iar

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\boldsymbol{w}^H(n+1)\boldsymbol{w}(n)+\boldsymbol{w}^H(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right\} = \boldsymbol{w}(n)$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{d}(n)-\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right)^H\boldsymbol{\lambda}\right\}\right\}$$
$$=\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{d}(n)-\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right)^H\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{H}}\left(\boldsymbol{d}(n)-\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right)\right\}\right\}$$

care conduce la

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\left\{\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{d}(n)-\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)\right)^H\boldsymbol{\lambda}\right\}\right\}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\boldsymbol{\lambda}$$

În consecinţă,

$$\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\{J(n)\}=\boldsymbol{w}(n+1)-\boldsymbol{w}(n)-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\boldsymbol{\lambda}$$

şi condiţia $\nabla_{\boldsymbol{w}^*(n+1)}\{J(n)\}=\boldsymbol{0}$ conduce la

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\boldsymbol{\lambda}$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\boldsymbol{\lambda}$$

Determinarea lui $\boldsymbol{\lambda}$

$\boldsymbol{\lambda}$ urmează a fi determinat din setul de condiţii $\boldsymbol{d}(n) = \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n+1)$.
Pentru aceasta, se înmulţeşte relaţia precedentă la stânga cu $\boldsymbol{A}(n)$ şi rezultă

$$\boldsymbol{d}(n) = \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n) + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\boldsymbol{\lambda}$$

Introducând vectorul erorilor

$$\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{d}(n) - \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{w}(n)$$

rezultă

$$\boldsymbol{\lambda} = 2\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\right)^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{e}(n)$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Relaţia de reactualizare a coeficienţilor

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\bar{\mu}\boldsymbol{A}^{H}(n)\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}(n)$$

unde, ca şi în cazul algoritmului NLMS a mai fost introdus coeficientul de ponderare $\bar{\mu}$.

Înlocuind vectorul $\boldsymbol{e}(n)$ în relaţia de mai sus, rezultă

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\left[\mathbf{I}-\bar{\mu}\boldsymbol{A}^{H}(n)\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{H}(n)\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}(n)\right]\boldsymbol{w}(n)+\bar{\mu}\boldsymbol{A}^{H}(n)\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{H}(n)\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{d}(n)$$

Matricea

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{H}(n)\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{H}(n)\right)^{-\mathbf{1}}$$

este pseudoinversa matricei $\boldsymbol{A}(n)$, iar

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{H}(n)\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{H}(n)\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}(n)$$

este matricea de proiecţie pe spaţiul definit de vectorii coloană ai matricei $\boldsymbol{A}(n)$.

În consecinţă relaţia de reactualizare a coeficienţilor se mai poate scrie $(n+1)$

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\bar{\mu}\boldsymbol{A}^{+}(n)\boldsymbol{e}(n)$$

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)+\bar{\mu}\boldsymbol{A}^{+}(n)\boldsymbol{e}(n)$$

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Regularizare

Ca şi în cazul algoritmului NLMS, există riscul ca matricea $\boldsymbol{A}(n)$ să devină nulă (dacă datele de la intrare sunt nule), şi matricea $\left(\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n)\right)$ să devină neinversabilă. Pentru a evita o asemenea situaţie, se introduce şi aici un termen de regularizare, aşa încât formula de reactualizare a coeficienţilor devine

$$\boxed{\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) + \bar{\mu}\boldsymbol{A}^{H}(n)\left[\boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}(n) + \delta\boldsymbol{I}\right]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}(n)}$$

unde δ este o constantă mică pozitivă.

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$$

for $\quad n = 0,1,2,\cdots$

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \overline{\mu}\mathbf{A}^H(n)\left[\mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n) + \delta\mathbf{I}\right]^{-1}\mathbf{e}(n)$$

end

ALGORITMUL PROIECŢIEI AFINE (APA)

Observaţii

- Algoritmul NLMS poate fi privit ca un caz particular al algoritmului APA, pentru $M = 1$.
- O analiză a convergenţei conduce la faptul că stabilitatea algoritmului necesită ca pasul
- să fie ales la fel ca la algoritmul NLMS, $\mu \in (0,2)$.
- Viteza de convergenţă este mai mare ca în cazul NLMS şi creşte cu numărul M, dar
- creşterea scade pe măsură ce creşte M.
- Complexitatea aritmetică, în mod evident va fi mai ridicată decât la NLMS.
- Pentru $N \gg M$, acesta este aproximativ proporţională cu NM.