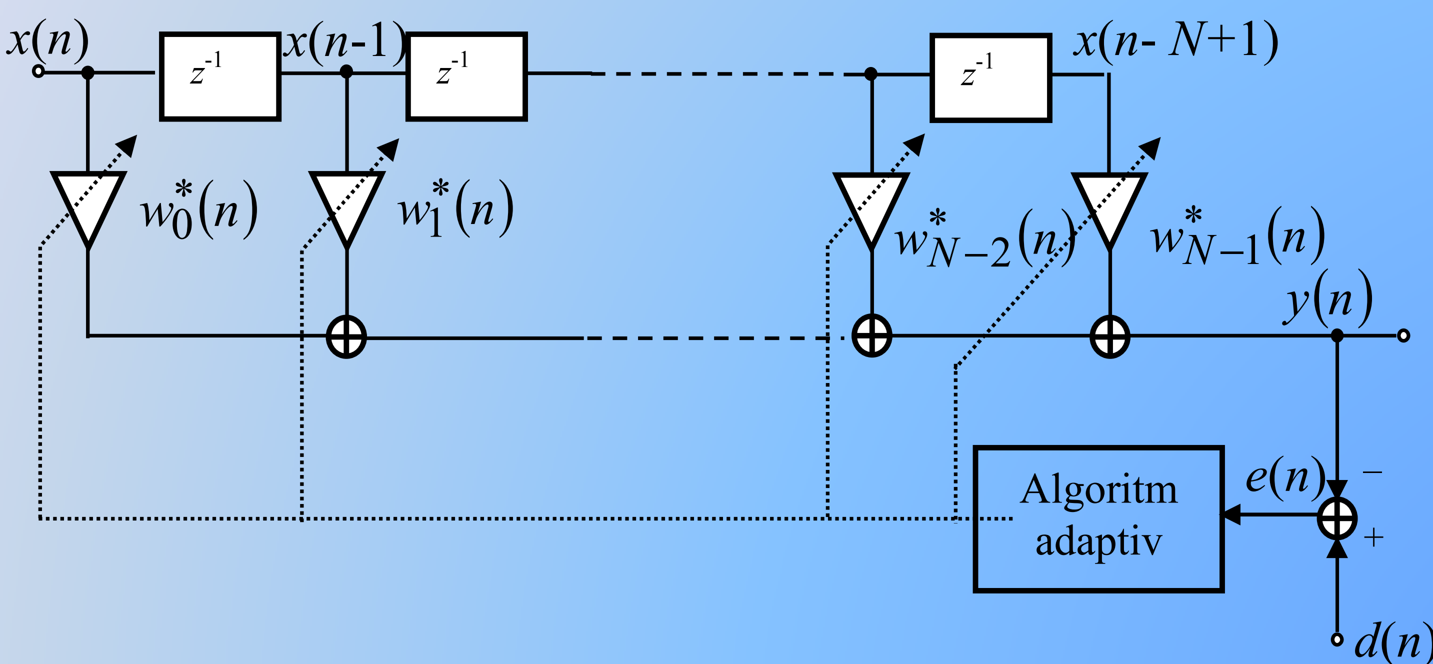
# 6. OPTIMIZARE PE BAZA METODEI CELOR MAI MICI PATRATE

6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)

# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.1. Funcţia cost

O funcţie cost fără medii statistice:

$$J = \sum_{n=i_1}^{i_2} |e(n)|^2$$



## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

$$e(n)=d(n)-y(n)=d(n)-\sum_{k=0}^{N-1} w_k^*(n)x(n-k)=d(n)-\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{x}(n)=[x(n),x(n-1),\ldots,x(n-N+1)]^T$$

Vom presupune că dispunem de setul de eşantioane:

$$x(1),x(2),\ldots,x(M),\ \ M>N.$$

În expresia lui $J$ intervin eşantioane de la $i_1$-$N$+1 până la $i_2$, $\Rightarrow$ $i_1=N$, $i_2=M$, aşa încât în expresia lui $J$ intervin numai eşantioanele cunoscute ale observaţiei. Vor trebui deci determinaţi coeficienţii filtrului, $w_k$, pentru care:

$$J=\sum_{n=N}^{M}|e(n)|^2$$

este minim.

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

Vom exprima eroarea pentru $n = N, N+1, \ldots, M$ sub forma:

$$e^*(N) = d^*(N) - \mathbf{x}^H(N)\mathbf{w}$$
$$e^*(N+1) = d^*(N+1) - \mathbf{x}^H(N+1)\mathbf{w}$$
$$\vdots$$
$$e^*(M) = d^*(M) - \mathbf{x}^H(M)\mathbf{w}$$

Vom introduce vectorii:

$$\mathbf{e}^H = [e(N), e(N+1), \ldots, e(M)];$$
$$\mathbf{d}^H = [d(N), d(N+1), \ldots, d(M)]$$

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

şi matricea de dimensiuni $N \times P, \quad P = M - N + 1$:

$$\mathbf{A}^H = [\mathbf{x}(N), \mathbf{x}(N+1), \ldots, \mathbf{x}(M)] = \begin{bmatrix} x(N) & x(N+1) & . & . & . & x(M) \\ x(N-1) & x(N) & . & . & . & x(M-1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x(1) & x(2) & . & . & . & x(M-N+1) \end{bmatrix}$$

Ecuaţiile de mai sus pot fi exprimate compact sub forma

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{w}$$

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

Rezultă funcţia cost:

$$J = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{e}^H \mathbf{e}.$$

$$J = \mathbf{d}^H \mathbf{d} - \mathbf{w}^H \mathbf{A}^H \mathbf{d} - \mathbf{d}^H \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{w}$$

Metoda de optimizare ce porneşte de la minimizarea acestei funcţii cost este cunoscută sub denumirea de *metoda celor mai mici pătrate*. Este consacrată prescurtarea “LS” provenind din limba engleză (**L**east **S**quares).

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

Vom introduce matricea:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}^H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi(0,0) & \Phi(1,0) & . & . & . & \Phi(N-1,0) \\ \Phi(0,1) & \Phi(1,1) & . & . & . & \Phi(N-1,1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \Phi(0,N-1) & \Phi(1,N-1) & & . & . & \Phi(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

sau

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{i=N}^{M} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$$

în care:

$$\Phi(p,r) = \sum_{k=N}^{M} x^*(k-p)x(k-r)$$

reprezintă un ***estimator temporal al funcţiei de autocorelaţie***, deci se poate considera că matricea introdusă reprezintă de fapt un ***estimator al matricei de autocorelaţie.*** Este o matrice hermitică, pozitiv semidefinită, cu valori proprii reale şi pozitive, dar nu mai e Toeplitz.

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
### 6.1.1. Funcţia cost

Notăm

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta(0), \theta(-1), \ldots, \theta(-N+1)]^T = \mathbf{A}^H \mathbf{d}$$

unde

$$\theta(-p) = \sum_{n=N}^{M} d^*(n) x(n-p)$$

reprezintă un ***estimator temporal al funcţiei de corelaţie între semnalul dorit şi secvenţa de intrare.***

$$J = \mathbf{d}^H \mathbf{d} - \mathbf{w}^H \mathbf{A}^H \mathbf{d} - \mathbf{d}^H \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{w}$$

$$J = \mathbf{d}^H \mathbf{d} - \mathbf{w}^H \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{w}$$

# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

Pentru minimizarea funcţiei cost în raport cu coeficienţii $w_k$, va trebui egalat cu zero gradientul complex al acesteia:

$$\nabla J = -\mathbf{A}^H \mathbf{d} + \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Sau

$$\nabla J = -\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

***Ecuaţia normală***

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta} \\ \sum_{p=0}^{N-1} w_p \Phi(p,r) = \theta(-r), \quad r = 0,\ldots,N-1\end{gathered}}$$

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

Dacă matricea de mai sus este nesingulară, sistemul se poate rezolva, conducând la setul de coeficienţi optimi,

$$\mathbf{w}_O = \mathbf{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\theta}.$$

Sau

$$\mathbf{w}_o = \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{d} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{d}$$

unde $\mathbf{A}^{+}$ este ***pseudoinversa*** matricei **A.**

# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

***Principiul ortogonalităţii***

$$\mathbf{A}^H\mathbf{d}-\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{w}_o=\mathbf{A}^H\left(\mathbf{d}-\mathbf{A}\mathbf{w}_o\right)=\mathbf{A}^H\mathbf{e}_{\min}=\mathbf{0}$$

$$\sum_{i=N}^{M}x(i-k)e_{\min}^{*}(i)=0,\quad k=0,\ldots,N-1$$

Punând matricea **A** sub forma

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}(N) & \mathbf{a}(N-1) & \cdots & \mathbf{a}(1)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^H\mathbf{e}_{\min}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^H(N)\\ \mathbf{a}^H(N-1)\\ \vdots\\ \mathbf{a}^H(1)\end{bmatrix}\mathbf{e}_{\min}=\mathbf{0}$$

sau

$$\mathbf{a}^H(n)\mathbf{e}_{\min}=\mathbf{0},\quad n=1,\cdots,N$$

Vectorul erorilor este ortogonal pe vectorii având drept componente cele $M$-$N$+1 eşantioane corespunzătoare oricăruia dintre semnalele din linia de întârziere a filtrului, în cazul când coeficienţii au valorile optime.

## 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

Definind vectorul ieşirilor filtrului,

$$\mathbf{y}^H = [y(N), y(N+1), \ldots, y(M)],$$

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{A}\mathbf{w}_o; \quad \mathbf{y}_o^H \mathbf{e}_{\min} = \mathbf{w}_o^H \mathbf{A}^H \mathbf{e}_{\min} = 0$$

sau

$$\sum_{i=N}^{M} y_o(i) e_{\min}^*(i) = 0.$$

# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

***Interpretare geometrică.*** Fie $\{\mathbf{A}\}$ spaţiul definit de vectorii coloană ai matricei **A:**

$$\mathbf{a}^H(n) = [x(n), x(n+1), \ldots, x(n+M-N)]$$

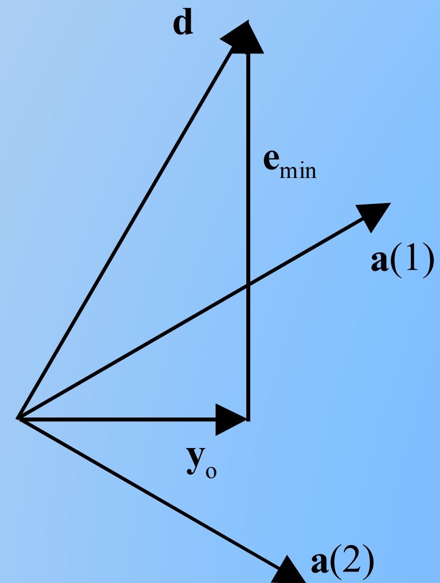
Evident, deoarece

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{A}\mathbf{w}_o = \mathbf{a}(N)w_{o,0} + \mathbf{a}(N-1)w_{o,1} + \ldots + \mathbf{a}(1)w_{o,N-1}$$

vectorul $\mathbf{y}_o$ aparţine spaţiului $\{\mathbf{A}\}$. $\mathbf{e}_{\min}$ este un vector ortogonal pe spaţiul $\{\mathbf{A}\}$, iar $\mathbf{y}_o$ este ortogonal pe $\mathbf{e}_{\min}$. În triunghiul format de $\mathbf{y}_o$, $\mathbf{e}_{\min}$ şi **d**,

$$\mathbf{e}_{\min} = \mathbf{d} - \mathbf{y}_o, \quad \mathbf{e}_{\min} \perp \mathbf{y}_o, \quad \mathbf{e}_{\min} \perp \{\mathbf{A}\}$$

deci de fapt $\mathbf{y}_o$ reprezintă proiecţia vectorului **d** pe spaţiul definit de **A**



# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{d}$$

Având în vedere interpretarea geometrică de mai înainte vom numi

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H$$

***matricea de proiecţie*** a spaţiului $\{\mathbf{A}\}$,deci

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{P}_A\mathbf{d}$$

Vom introduce de asemenea matricea ***complement ortogonal al matricei de proiecţie a spaţiului*** $\{\mathbf{A}\}$***:***

$$\mathbf{P}_A^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H$$

# 6.1 Metoda standard a celor mai mici pătrate (LS)
## 6.1.2. Ecuaţia normală. Principiul ortogonalităţii

Din relaţiile de ortogonalitate decurge evident următoarea relaţie între energii:

$$E_d = E_y + E_{\min}$$

în care $E_d, E_y, E_{\min}$ reprezintă energia semnalului dorit, a semnalului la ieşire şi respectiv, a semnalului eroare, în cazul coeficienţilor optimi:

$$E_d = \sum_{i=N}^{M} |d(i)|^2; \quad E_y = \sum_{i=N}^{M} |y_o(i)|^2; \quad E_{\min} = J_{\min} = \sum_{i=N}^{M} |e_{\min}(i)|^2;$$

În fine, energia erorii în cazul coeficienţilor optimi este:

$$E_{\min} = J_{\min} = E_d - E_y = E_d - \mathbf{y}_o^H \mathbf{y}_o = E_d - \mathbf{w}_o^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{w}_o =$$

$$= E_d - \mathbf{w}_o^H \mathbf{\Phi} \mathbf{w} = E_d - \mathbf{w}_o^H \boldsymbol{\theta} = E_d - \boldsymbol{\theta}^H \mathbf{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\theta}$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

Coeficienţii optimi sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$\mathbf{\Phi w} = \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^H \mathbf{d}$$

Matricea Φ nu mai este o matrice Toeplitz → algoritmul Levinson-Durbin nu mai poate fi aplicat pentru rezolvarea sistemului.

Rezolvarea sistemului presupune inversarea matricei **Φ**.

Numărul condiţional al matricei **Φ** este pătratul numărului condiţional al matricei **A** → erori importante în calculul inversei.

In plus, gama dinamică a elementelor matricei **Φ** este mare ca urmare a efectuării produsului.

De aceea este mai indicat să se caute alte metode de rezolvare a sistemului fără a apela la calculul inversei matricei **Φ**.

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

Scriind sistemul sub forma:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}^H \mathbf{d}$$

se constată că el este satisfăcut dacă

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{d}$$

**C**ondiţia aceasta este suficientă, dar nu şi necesară; ea presupune de fapt anularea erorilor şi sistemul respectiv nu este compatibil decât în cazuri cu totul particulare (este un sistem de P=$M$-$N$+1 ecuaţii cu $N$ necunoscute).

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.1 Factorizarea Cholesky

Porneşte de la ideea descompunerii matricei $\mathbf{\Phi}$ într-un produs de două matrice pătrate, una inferior triunghiulară şi alta superior triunghiulară:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{\Phi} = \mathbf{L}\mathbf{L}^H, \qquad \mathbf{L} = \left[l_{ij}\right]_{i,j=1,\dots,N} \\ l_{ij} = 0, \quad j = i+1,\dots,N\end{gathered}}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.1 Factorizarea Cholesky

***Realizarea descompunerii.***

Să vedem cum poate fi realizată această factorizare printr-un procedeu recursiv. Vom nota $\varphi_{i,j}$ elementele matricei $\mathbf{\Phi}$. Evident:

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk}^{*}$$

$$\varphi_{11} = l_{11}^{2} \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{\varphi_{11}}$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.1 Factorizarea Cholesky

$$\varphi_{i.1} = l_{i1} l_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{i1} = \frac{\varphi_{i1}}{\sqrt{\varphi_{11}}} \qquad i = 2,\ldots, N$$

$$\varphi_{jj} = \sum_{k=1}^{j} \left| l_{jk} \right|^2 = l_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} \left| l_{jk} \right|^2$$

$$l_{jj} = \sqrt{\varphi_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \left| l_{jk} \right|^2}$$

Cu aceste relaţii se poate calcula elementul de pe diagonală şi coloana $j$, cunoscând elementele de pe coloanele 1,...,$j$-1.

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.1 Factorizarea Cholesky

În general, se poate scrie pentru $i > j$ :

$$\varphi_{ij} = l_{ij} l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}^{*}$$

de unde

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( \varphi_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}^{*} \right), \quad i = j+1, \ldots, N$$

care permite calculul celorlalte elemente ale coloanei $j$.

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.1 Factorizarea Cholesky

$$l_{11} = \sqrt{\varphi_{11}}$$

for $i$=2:$N$

$$l_{i1} = \frac{\varphi_{i1}}{\sqrt{\varphi_{11}}} \quad i = 2,\dots,N$$

end $i$

for j=2:$N$

$$l_{jj} = \sqrt{\varphi_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \left| l_{jk} \right|^2}$$

for $i$=$j$+1:$N$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( \varphi_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}^* \right)$$

end $i$

end $j$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.1 Factorizarea Cholesky

***Rezolvarea sistemului***

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^H \mathbf{w} = \boldsymbol{\theta}$$

*Primă etapă*: vom rezolva sistemul

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta} \quad \text{unde} \quad \mathbf{u} = \mathbf{L}^H \mathbf{w}$$

Datorită caracterului triunghiular al matricei **L** sistemul se rezolvă simplu prin substituţii succesive, începând cu:

$$u_1 = \frac{\theta_1}{l_{11}}$$

şi continuând apoi conform relaţiei:

$$u_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(\theta_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j\right), \quad i = 2, \ldots, N$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.1 Factorizarea Cholesky

*A doua etapă*: se va rezolva sistemul:

$$\mathbf{L}^H \mathbf{w} = \mathbf{u}$$

având-se în vedere că de această dată matricea sistemului este superior triunghiulară:

$$w_N = \frac{u_N}{l_{NN}}$$

$$w_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(u_i - \sum_{j=i+1}^{N} w_j l_{ji}^*\right),\ i = N-1, N-2, \ldots 1$$

În mediul MATLAB, instrucţiunea **R**=**CHOL(X)** , unde X este o matrice hermitică pozitiv semidefinită, generează o matrice superior triunghiulară **R**, astfel încât:

$$\mathbf{R}^H \mathbf{R} = \mathbf{X}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.2 Factorizarea LDU

Ne propunem să realizăm o descompunere a matricei $\mathbf{\Phi}$ sub forma:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{LDU}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{L}^H$$

unde $\mathbf{L}$ este o matrice inferior triunghiulară, având $l_{ii}=1$, $i=1,...,N$, iar $\mathbf{D}$ este o matrice diagonală, cu elementele notate cu $d_i$.

***Realizarea factorizării***

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk}^*, \qquad j = 1,2,..., i$$

Coeficienţii $l_{ik}$ şi $d_k$ vor putea fi calculaţi recursiv:

$$d_1 = \varphi_{11}$$

$$l_{i1} = \frac{\varphi_{i1}}{d_1}, \quad i = 2,..., N$$

$$d_i = \varphi_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |l_{ik}|^2 d_k \qquad i = 2,..., N$$

$$l_{ij} = \frac{1}{d_j}\left(\varphi_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}^*\right) \qquad i = 2,..., N, \qquad j = 2,..., i-1$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE
### 6.2.2 Factorizarea LDU

***Rezolvarea sistemului***

*Prima etapă*: se rezolvă sistemul:

$$\mathbf{Lu} = \boldsymbol{\theta}, \quad \text{unde} \quad \mathbf{u} = \mathbf{DL}^H \mathbf{w}$$

Având în vedere structura matricei **L**, sistemul se rezolvă simplu, prin substituţii:

$$u_1 = \theta_1$$

$$u_i = \theta_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j, \quad i = 2, \ldots, N$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE
### 6.2.2 Factorizarea LDU

*A doua etapă*: se rezolvă sistemul:

$$\mathbf{D}\mathbf{L}^H\mathbf{w} = \boldsymbol{\theta} \qquad \text{sau}$$

$$\mathbf{L}^H\mathbf{w} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{u}$$

În mod asemănător

$$w_N = \frac{u_N}{d_N}$$

$$w_i = \frac{u_i}{d_i} - \sum_{j=i+1}^{N} l_{ji}^* w_j, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 1$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE
### 6.2.3 Factorizarea QR

Factorizarea matricei **A** sub forma:

$$\mathbf{QA} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

**A** este de forma $P$x$N$, $P=M-N+1$;
**R** este o matrice superior triunghiulară, $N$x$N$
**Q** matrice unitară, $P$x$P$.
Presupunem $P \geq N$ $\Rightarrow$ sistemul **Aw**=**d** este supradeterminat.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^H \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE
### 6.2.3 Factorizarea QR

Ecuaţia normală devine:

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}^H\mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}^H \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{w} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}^H \mathbf{Q}\mathbf{d}$$

Vom face o partiţie a vectorului **Qd** de dimensiune Px1 sub forma:

$$\mathbf{Q}\mathbf{d} = \begin{bmatrix}\mathbf{d}_N\\ \mathbf{c}_{P-N}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^H\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{R}^H\mathbf{d}_N$$

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{d}_N$$

Cum **R** este o matrice triunghiulară, sistemul se rezolvă simplu prin substituţii.

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{R}^H\mathbf{R}$$

deci $\mathbf{R}^\mathbf{H}$ este factorul Cholesky al matricei **Φ**.

Numărul condiţional al matricei **R** este egal cu cel al matricei **A**, deci este mai mic (rădăcină pătrată) faţă de cel al matricei **Φ.**

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.1 Ortogonalizarea Gram-Schmidt

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

Rotirea unui vector real:

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T = [r\cos\alpha, r\sin\alpha]^T$$

$$r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

Fie o matrice unitară

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Produsul:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha-\beta) \\ r\sin(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

reprezintă un vector rotit faţă de **v** cu unghiul $\beta$.

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

Produsul:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha-\beta) \\ r\sin(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

reprezintă un vector rotit faţă de **v** cu unghiul $\beta$.

În particular, se poate alege $\beta$ astfel încât:

$$v_2' = -v_1 \sin\beta + v_2 \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}, \quad c = \cos\beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad s = \sin\beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

*Rotaţia unui vector* ***v*** *complex.*

Vom accepta totuşi fără a reduce generalitatea că $v_1$ este real şi pozitiv.
Pentru a obţine:

$$\mathbf{Tv} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s^* \\ -s & c \end{bmatrix}, \quad r = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}, \quad c = \frac{v_1}{r}, \quad s = \frac{v_2}{r}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

*Rotaţia unui vector N- dimensional*

Să presupunem că vectorul $N$- dimensional $\mathbf{v}$ cu componentele $v_j$ şi $v_k$ nenule, $v_j$ real şi pozitiv şi dorim să anulăm componenta $k$. Se constituie matricea $\mathbf{T}_{jk}$ :

$$\mathbf{T}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . & & & & . & & & & . \\ . & & & & . & & & & . & & & & . \\ 0 & . & . & . & c & . & . & . & s^* & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & -s & . & . & . & c & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

$$t_{jj} = t_{kk} = c = \frac{v_j}{\sqrt{|v_j|^2 + |v_k|^2}}, \quad t_{jk} = s^*, \quad t_{kj} = -s, \quad s = \frac{v_k}{\sqrt{|v_j|^2 + |v_k|^2}}$$

iar toate celelalte elemente corespund unei matrice unitate.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}_{jk}\mathbf{v}$$

$$v'_i = v_i, \quad i \neq j, k$$

$$v'_j = \sqrt{|v_j|^2 + |v_k|^2}; \quad v'_k = 0$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

*Rotaţia aplicată unei matrice*

În fine, să considerăm cazul când $\mathbf{T}_{jk}$ acţionează asupra unei matrice $\mathbf{A}$ de dimensiune $P \times N$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_{jk}\mathbf{A}$$

Presupunând că $\mathbf{T}$ are structura prezentată mai înainte, rezultă că va acţiona numai asupra liniilor $j$ şi $k$, celelalte elemente rămânând nemodificate. Mai precis,

$$a'_{ji} = ca_{ji} + s^{*}a_{ki}; \quad a'_{ki} = -sa_{ji} + ca_{ki};$$

Ne propunem să anulăm elementul $a'_{kj}$. Presupunând $a_{jj}$ real şi pozitiv şi alegând:

$$c = \frac{a_{jj}}{\sqrt{\left|a_{jj}\right|^2 + \left|a_{kj}\right|^2}}, \quad s = \frac{a_{kj}}{\sqrt{\left|a_{jj}\right|^2 + \left|a_{kj}\right|^2}}$$

se obţin:

$$a'_{jj} = \sqrt{\left|a_{jj}\right|^2 + \left|a_{kj}\right|^2}, \quad a'_{kj} = 0$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.2 Metoda rotaţiilor Givens

Procedeul poate fi aplicat succesiv pentru triangularizarea matricei **A**.

Se începe cu anularea elementelor de pe prima coloană şi liniile 2,3,...,$P$. Pentru aceasta se vor lua succesiv pentru $j,k$ perechile ( 1,2 ), ( 1,3 ),…,( 1,$P$ ). Prin $P$-1 asemenea operaţii se anulează $a_{k,1}$, $k$=2,..,$P$.

Se trece apoi la coloana a doua, urmărind să se anuleze $a_{k,2}$, $k$=3,...,$P$ şi aşa mai departe, până la ultima coloană.

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.3 Realizarea rotaţiilor Givens cu ajutorul algoritmului CORDIC

**CORDIC** (**CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputation)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\cdots0\; a_{jj} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{jN} \\ 0\cdots0\; a_{kj} & a_{k,j+1} & \cdots & a_{kN} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\cdots0\; a'_{jj} & a'_{j,j+1} & \cdots & a'_{jN} \\ 0\cdots0\; a'_{kj} & a'_{k,j+1} & \cdots & a'_{kN} \end{bmatrix}$$

Argumentul $\theta$ se alege aşa încât $a'_{kj}=0$ , deci vectorul $\begin{bmatrix} a_{jj} \\ a_{kj} \end{bmatrix}$, de forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, pe care îl vom numi *vector director*, trebuie astfel rotit încât să devină coliniar cu axa O$x$; apoi toţi vectorii următori $\begin{bmatrix} a_{ji} \\ a_{ki} \end{bmatrix}$, $i > j$ vor fi rotiţi cu acelaşi unghi

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.3 Realizarea rotaţiilor Givens cu ajutorul algoritmului CORDIC

$$\begin{bmatrix} a'_j \\ a'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_j \cos\theta + a_k \sin\theta \\ -a_j \sin\theta + a_k \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} a_j + a_k \operatorname{tg}\theta \\ a_k - a_j \operatorname{tg}\theta \end{bmatrix}$$

Dacă

$$\operatorname{tg}\theta = 2^{-i}, \quad i \in \mathbf{N}$$

$$\begin{bmatrix} a'_j \\ a'_k \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} a_j + a_k 2^{-i} \\ a_k - a_j 2^{-i} \end{bmatrix}$$

$\theta$ poate fi exprimat

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \theta_i, \quad \rho_i = \pm 1, \quad \theta_i = \operatorname{arctg} 2^{-i}$$

$$K = \prod_{i=0}^{\infty} \cos\theta_i$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE
## 6.2.3 Factorizarea QR
### 6.2.3.3 Realizarea rotaţiilor Givens cu ajutorul algoritmului CORDIC

aşa încât o rotaţie se reduce la efectuarea succesiunii de operaţii:

$$\left[a_j^{(0)}, a_k^{(0)}\right] = K\left[a_j, a_k\right]$$
$$\left[a_j^{(1)}, a_k^{(1)}\right] = \left[a_j^{(0)} + \rho_0 2^0 a_k^{(0)}, a_k^{(0)} - \rho_0 2^0 a_j^{(0)}\right]$$
$$\left[a_j^{(2)}, a_k^{(2)}\right] = \left[a_j^{(1)} + \rho_1 2^{-1} a_k^{(1)}, a_k^{(1)} - \rho_1 2^{-1} a_j^{(1)}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[a_j^{(i+1)}, a_k^{(i+1)}\right] = \left[a_j^{(i)} + \rho_i 2^{-i} a_k^{(i)}, a_k^{(i)} - \rho_i 2^{-i} a_j^{(i)}\right]$$
$$\vdots$$

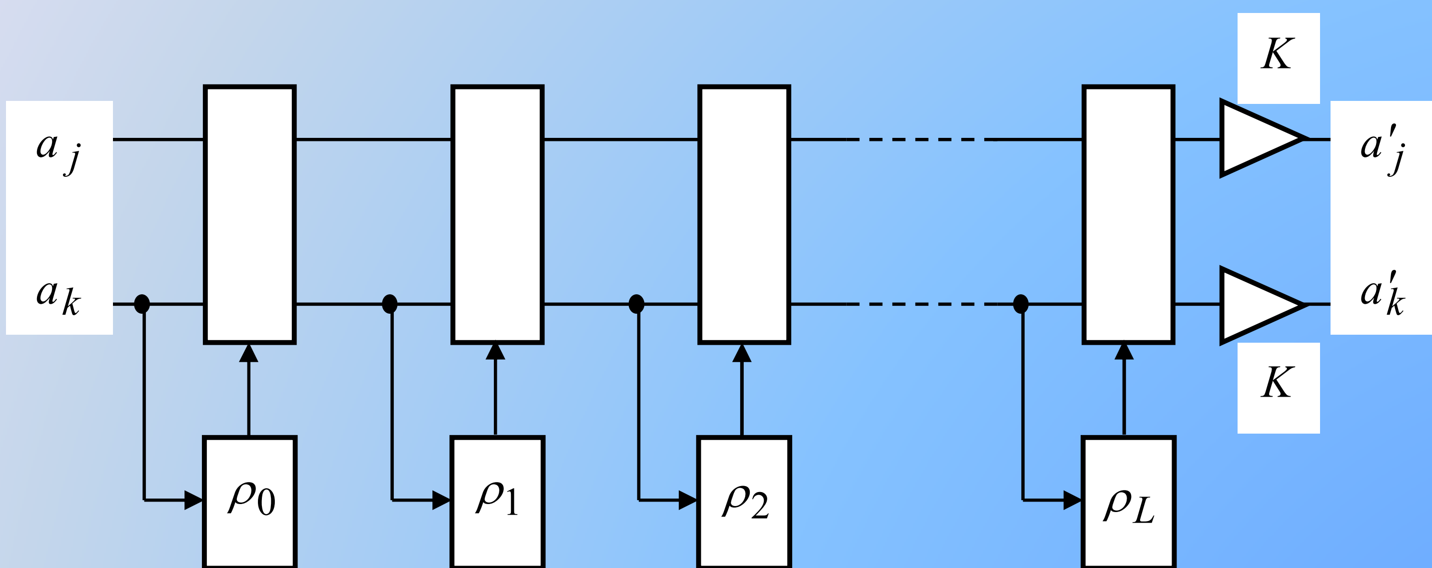
Problema determinării unghiului $\theta$, deci de fapt a parametrilor binari $\rho_i = \pm 1$

$$\rho_i = \operatorname{sgn}\left(a_{jj}^{(i)}\right)\operatorname{sgn}\left(a_{kj}^{(i)}\right) = \operatorname{sgn}\left(a_{kj}^{(i)}\right)$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.3 Realizarea rotaţiilor Givens cu ajutorul algoritmului CORDIC



## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^H$$

unde **u** este un vector de normă unitară

$$\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$$

Matricea **H** a transformării este ***hermitică unitară***:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^H$$

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{H} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^H\right)\left(\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^H\right) = \mathbf{I} - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^H + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{u}\mathbf{u}^H = \mathbf{I}$$

Se verifică uşor că dacă se alege

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

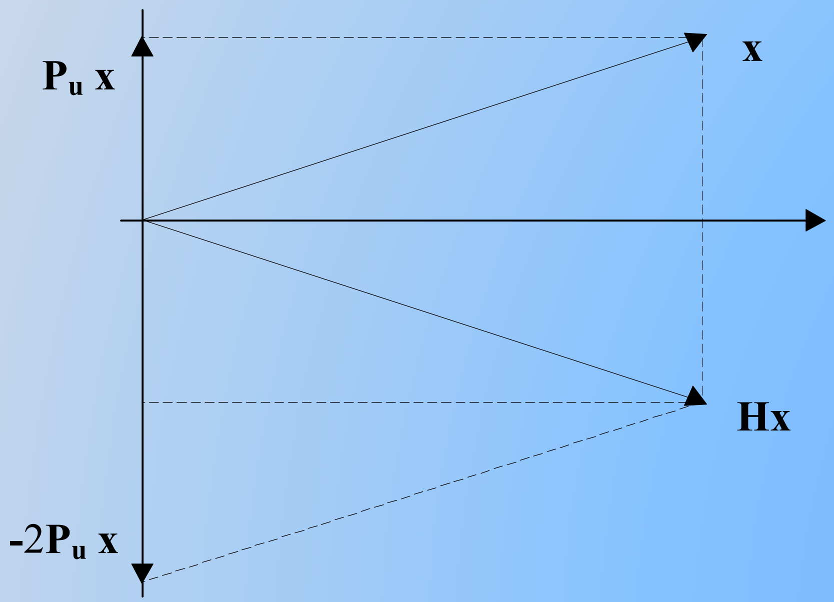
***Interpretare geometrică***

$$\mathbf{P}_u(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{u}^H \mathbf{x}\right)\mathbf{u}$$

reprezintă proiecţia vectorului **x** pe vectorul **u** şi

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{x} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\left(\mathbf{u}^H\mathbf{x}\right)\mathbf{u} = \mathbf{x} - 2\mathbf{P}_u(\mathbf{x})$$

**Hx** reprezintă imaginea oglindită (reflexia) lui **x** în raport cu hiperplanul ortogonal pe vectorul **u**.



# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

Fie un vector $\mathbf{e}_i$ având toate elementele nule, cu excepţia elementului $i$ care are valoarea 1. Să considerăm transformarea definită prin vectorul:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i}{\left\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right\|}$$

Se găsesc :

$$\mathbf{u}^H\mathbf{x} = \frac{\left(\mathbf{x}^H - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i^H\right)\mathbf{x}}{\left\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| - x_i\right)}{\left\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right\|}$$

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{x} - 2\left(\mathbf{u}^H\mathbf{x}\right)\mathbf{u} = \mathbf{x} - 2\frac{\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| - x_i\right)\left(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right)}{\left(\mathbf{x}^H - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i^H\right)\left(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right)} = \mathbf{x} - 2\frac{\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| - x_i\right)\left(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right)}{2\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| - x_i\right)}$$

$$\mathbf{Hx} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i$$

Deoarece:

$$\left\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right\|^2 = \left(\mathbf{x}^H - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i^H\right)\left(\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_i\right) = 2\|\mathbf{x}\|\left(\|\mathbf{x}\| - x_i\right) > 0$$

rezultă că $x_i$ trebuie să fie real şi

$$\|\mathbf{x}\| - x_i > 0$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.3 Factorizarea QR

### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

Această proprietate face transformarea Householder utilă pentru triunghiularizarea unei matrice şi deci şi pentru rezolvarea ecuaţiei normale prin descompunere QR.

Matricea **A** poate fi scrisă:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N], \qquad \mathbf{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{Pi}]^T$$

O primă transformare urmăreşte eliminarea elementelor coloanei 1, mai puţin $a_{11}$.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|\mathbf{e}_1}{\left\|\mathbf{a}_1 - \|\mathbf{a}_1\|\mathbf{e}_1\right\|}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^H$$

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & . & . & . & a_{2N}^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{P2}^{(1)} & . & . & . & a_{PN}^{(1)} \end{bmatrix}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

Următoarea etapă va consta în anularea termenilor coloanei a doua, situaţi sub diagonala principală, luând

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2 - \|\mathbf{a}'_2\|\mathbf{e}_2}{\left\|\mathbf{a}'_2 - \|\mathbf{a}'_2\|\mathbf{e}_2\right\|}$$

$$\mathbf{a}'_2 = \left[0, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{P2}^{(1)}\right]^T$$

Elementele primei linii şi ale primei coloane nu sunt modificate de transformare.

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & . & . & . & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & . & . & . & a_{2N}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{PN}^{(2)} \end{bmatrix}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.3 Factorizarea QR

#### 6.2.3.4 Transformarea ( reflexia ) Hauseholder

Presupunând $P>N$, după $N$ asemenea operaţii se obţine:

$$\mathbf{H}_N \mathbf{H}_{N-1} \ldots \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_{N-1} \mathbf{H}_{N-2} \ldots \mathbf{H}_1$$

şi sistemul se rezolvă după cum s-a arătat în paragrafele precedente.

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

#### 6.2.4.1 Teorema descompunerii după valorile singulare. Pseudoinversa unei matrice dreptunghiulare.

Există două matrice unitare **V** şi **U**, aşa încât:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \text{unde} \qquad \mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$$

$\sigma_i$ se numesc ***valorile singulare*** ale matricei **A**, iar pătratele lor coincid cu valorile proprii ale matricei **Φ**. Ele sunt reale şi pozitive şi le vom presupune ordonate $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$, iar $r$ este rangul matricei **A**. **U** este o matrice de dimensiuni $P$x$P$,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_P],$$

iar vectorii coloană $\mathbf{u}_i$ se numesc ***vectori singulari la stânga*** ai matricei **A**. **V** este o matrice de dimensiuni $N$x$N$,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_N]$$

iar vectorii coloană $\mathbf{v}_i$ se numesc ***vectori singulari la dreapta***.

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

#### 6.2.4.1 Teorema descompunerii după valorile singulare. Pseudoinversa unei matrice dreptunghiulare.

Se defineşte ***pseudoinversa*** matricei **A**

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{H}$$

Pseudoinversa poate fi exprimată şi direct în funcţie de matricea **A**, dacă aceasta este de rang maxim,

$$r = \min\{P, N\},$$

prin

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{H}$$

în cazul $P>N$, sau prin

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{H}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{H}\right)^{-1}$$

dacă $P<N$.

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.1 Teorema descompunerii după valorile singulare. Pseudoinversa unei matrice dreptunghiulare.

***în cazul P>N***

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{H}$$

În acest caz

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}_{N}$$

şi deoarece $r=N$

$$\mathbf{U}^{H}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

şi

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{H}$$

## 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

### 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.1 Teorema descompunerii după valorile singulare. Pseudoinversa unei matrice dreptunghiulare.

***în cazul P<N***.

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{H}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{H}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{I}_{P}$$

şi deoarece $r=P$

$$\mathbf{U}^{H}\mathbf{A}\mathbf{V} = [\mathbf{\Sigma} \quad \mathbf{0}]$$

şi

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^{H}$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.1 Teorema descompunerii după valorile singulare. Pseudoinversa unei matrice dreptunghiulare.

***Consecinţe***

Deoarece **U** este o matrice unitară,

$$\mathbf{AV} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

de unde

$$\mathbf{Av}_i = \begin{cases} \sigma_i \mathbf{u}_i, & i = 1, \cdots, r \\ \mathbf{0}, & i = r+1, \cdots, P \end{cases}$$

Exprimarea matricei de date în funcţie de valorile singulare şi vectorii singulari

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^H \quad \text{sau} \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H$$

Exprimarea pseudoinversei în funcţie de valorile singulare şi vectorii singulari

$$\mathbf{A}^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^H$$

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.2 Soluţia de normă minimă a problemei celor mai mici pătrate

Fie sistemul:

$$\mathbf{Aw} = \mathbf{d}$$

având în general $P$ ecuaţii şi $N$ necunoscute cu o matrice **A** de rangul $r$. Sistemul are o soluţie unică dacă $r$=$P$=$N$, şi aceasta este:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$$

Dacă $r \leq N < P$, sistemul este incompatibil (supradeterminat) deci nu admite nici o soluţie, cu excepţia situaţiei particulare când $N$=$r$=rang[**A**,**d**]. Dacă $r \leq P < N$ sistemul este nedeterminat (subdeterminat), deci admite o infinitate de soluţii.

Vom arăta în continuare că:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{d}$$

reprezintă soluţia unică a sistemului în sensul celor mai mici pătrate, adică acea soluţie ce minimizează norma erorii

$$\left\| \mathbf{Aw} - \mathbf{d} \right\|^2$$

şi are totodată norma euclidiană $\|w\|$ minimă.

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.2 Soluţia de normă minimă a problemei celor mai mici pătrate

***Demonstraţie***

$$\|\mathbf{Aw}-\mathbf{d}\|^2=\left(\mathbf{d}^H-\mathbf{w}^H\mathbf{A}^H\right)\left(\mathbf{d}-\mathbf{Aw}\right)=\left(\mathbf{d}^H-\mathbf{w}^H\mathbf{A}^H\right)\mathbf{U}\mathbf{U}^H\left(\mathbf{d}-\mathbf{Aw}\right)=$$

$$=\left(\mathbf{d}^H\mathbf{U}-\mathbf{w}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U}\right)\left(\mathbf{U}^H\mathbf{d}-\mathbf{U}^H\mathbf{Aw}\right)=\left(\mathbf{d}^H\mathbf{U}-\mathbf{w}^H\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U}\right)\left(\mathbf{U}^H\mathbf{d}-\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{w}\right)$$

$$\mathbf{V}^H\mathbf{w}=\mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{U}^H\mathbf{d}=\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1\\ \mathbf{c}_2\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{Aw}-\mathbf{d}\|^2=\left(\mathbf{c}^H-\mathbf{z}^H\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)\left(\mathbf{c}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{z}\right)=\left(\left[\mathbf{c}_1^H,\mathbf{c}_2^H\right]-\left[\mathbf{z}_1^H\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{0}\right]\right)\left(\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1\\ \mathbf{c}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\left[\mathbf{c}_1^H-\mathbf{z}_1^H\boldsymbol{\Sigma},\ \mathbf{c}_2^H\right]\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1-\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{c}_2\end{bmatrix}=\|\mathbf{c}_1-\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{z}_1\|^2+\|\mathbf{c}_2\|^2$$

Aceasta poate fi minimizată luând

$$\mathbf{z}_1=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{c}_1$$

şi nu depinde de $\mathbf{z}_2$.

# 6.2 METODE EFICIENTE DE REZOLVARE A PROBLEMEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

## 6.2.4 Descompunerea matricei A după valorile singulare

### 6.2.4.2 Soluţia de normă minimă a problemei celor mai mici pătrate

Pe de altă parte:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^H\mathbf{w} = \mathbf{w}^H\mathbf{v}\mathbf{v}^H\mathbf{w} = \mathbf{z}^H\mathbf{z} = \|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2$$

care poate fi minimizat luând

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$$

Rezultă deci

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}\mathbf{z} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2\end{bmatrix} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^H\mathbf{d} = \mathbf{A}^+\mathbf{d}$$