Problema estimării frecvenţelor unor semnale sinusoidale în prezenţa zgomotului

Modelul semnalului. Caracteristici spectrale şi de corelaţie

Să considerăm cazul unor exponenţiale complexe în prezenţa unui zgomot alb, necorelat cu semnalul, de valoare medie nulă şi dispersie σ_w^2:

$$y(n)=\sum_{i=1}^{P} A_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i n}+w(n)=\sum_{i=1}^{P} x_i(n)+w(n)$$

- Amplitudinile $A_i \in [0,\infty)$ şi frecvenţele unghiulare $\omega_i \in [-\pi,\pi]$ se presupun deterministe, dar necunoscute;
- fazele φ_i sunt variabile aleatoare necorelate, uniform distribuite în $[-\pi,\pi]$.

Modelul ARMA

$$x_i(n) = A_i e^{j\varphi_i} e^{jn\omega_i}$$

$$x_i(n) = e^{j\omega_i} x_i(n-1)$$

sau introducând operatorul "întârziere cu un tact" q^{-1},

$$x_i(n) = e^{j\omega_i} q^{-1} x_i(n) \Rightarrow \left(1 - e^{j\omega_i} q^{-1}\right) x_i(n) = 0$$

Pentru P=1

$$y(n-1)=x_i(n-1)+w(n-1)$$
$$y(n)=x_i(n)+w(n)$$

Înmulţind prima ecuaţie cu $e^{j\omega_i}$ şi scăzând-o din a doua se elimină $x_i(n)$:

$$\left(1-e^{j\omega_i}q^{-1}\right)y(n)=\left(1-e^{j\omega_i}q^{-1}\right)w(n)$$

În cazul general a P componente se obţine deci

$$A(q)y(n)=A(q)w(n) \quad \text{unde} \quad A(q)=\prod_{i=1}^{P}\left(1-e^{j\omega_i}q^{-1}\right)$$

Observații

-Este o formă particulară de model ARMA (model ARMA degenerat)

-Polinomul $A(q)$ poartă informaţia completă asupra frecvenţelor $\{\omega_i\}_{i=1}^{P}$,

deoarece rădăcinile sale sunt

$$q_i = e^{j\omega_i} \quad i = 1,\cdots,P$$

-Scriind

$$A(q) = \sum_{i=0}^{P} a_i q^{-i}, \quad a_0 = 1$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{P} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{P} a_i w(n-i)$$

Funcţia de autocorelaţie

Evaluăm mai întâi

$$F(i,l) = \mathrm{E}\{x_i(n)x_l^*(n)\} = \mathrm{E}\{A_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega_i n} A_l e^{-j\varphi_l} e^{-j\omega_l n}\} =$$
$$= A_i A_l e^{j(\omega_i - \omega_l)n} \mathrm{E}\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\}$$

Pentru $i = l$,

$$\mathrm{E}\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\} = 1$$

iar pentru $i \neq l$

$$\mathrm{E}\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\} = \mathrm{E}\{e^{j\varphi_i}\}\mathrm{E}\{e^{-j\varphi_l}\} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\varphi}\mathrm{d}\varphi\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\varphi}\mathrm{d}\varphi\right] = 0$$

deci

$$F(i,l) = \begin{cases} A_i^2, & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

La fel se deduce că

$$E\left\{x_i(n)x_l^*(n-k)\right\}=\begin{cases} A_i^2 e^{jk\omega_i}, & i=l \\ 0 & i\neq l \end{cases}$$

aşa încât rezultă

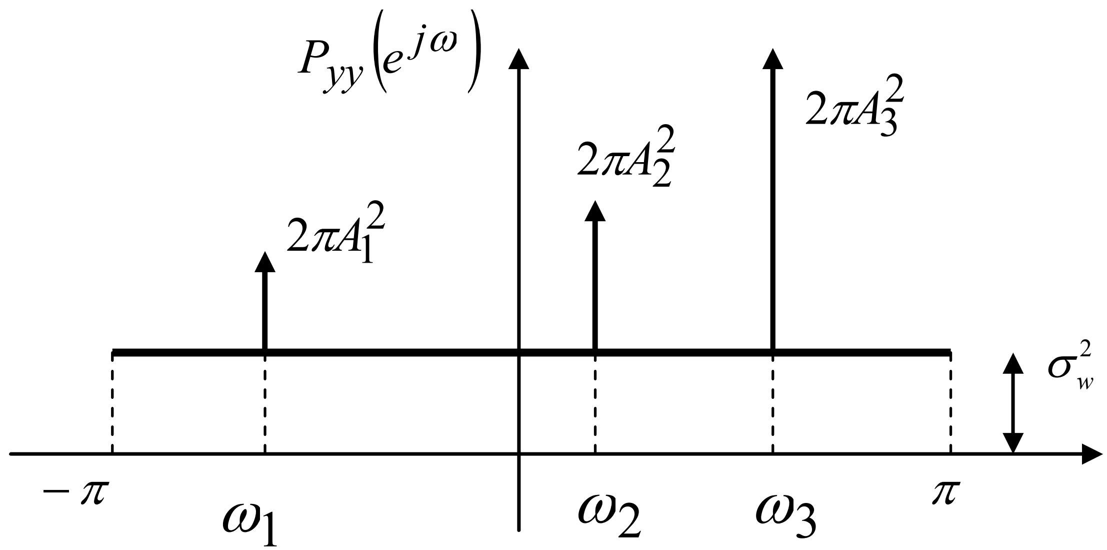
$$r_{yy}(k)=\mathrm{E}\left\{y(n)y^*(n-k)\right\}=\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{P}x_i(n)\sum_{l=1}^{P}x_l^*(n-k)\right\}+E\left\{w(n)w^*(n-k)\right\}=$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{P}\sum_{l=1}^{P}\mathrm{E}\left\{x_i(n)x_l^*(n-k)\right\}\right\}+\sigma_{\mathrm{w}}^2\delta(k)=\sum_{i=1}^{P}A_i^2 e^{jk\omega_{\mathrm{i}}}+\sigma_{\mathrm{w}}^2\delta(k)$$

Densitatea spectrală de putere

Se calculează ca transformată Fourier în timp discret a funcţiei de autocorelaţie.

$$P_{yy}\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{TFTD}\left\{r_{yy}(k)\right\} = 2\pi\sum_{i=1}^{P} A_i^2\,\delta(\omega-\omega_i) + \sigma_w^2$$



Vectorul de date

$$\mathbf{y}(n)=\left[y(n),y(n-1),\cdots,y(n-N+1)\right]^T$$

Vectorii frecvenţă

$$\mathbf{e}_i=\left[1,e^{-j\omega_i},e^{-2j\omega_i},\cdots,e^{-j(N-1)\omega_i}\right]^T,\ \ i=1,\cdots,P$$

Matricea de autocorelaţie **R** asociată vectorului de date este

$$\mathbf{R}=\mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\right\}=\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) & \cdots & r_{yy}(N-1) \\ r_{xx}(-1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(-(N-1)) & r_{xx}(-(N-2)) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_c(n) = [x_1(n), x_2(n), \cdots, x_P(n)]$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1(n), \mathbf{e}_2(n), \cdots, \mathbf{e}_P(n)]$$

Deoarece

$$y(n-k) = \sum_{i=1}^{P} x_i(n-k) + w(n-k) = \sum_{i=1}^{P} x_i(n) e^{-jk\omega_i} + w(n-k)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}_c(n) + \mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{R} = \mathrm{E}\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathrm{E}\{\mathbf{A}\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\mathbf{A}^H\} + \mathrm{E}\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\} =$$
$$= \mathbf{A}\mathrm{E}\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{P} \triangleq E\left\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\right\} = \mathrm{diag}\left\{A_1^2, A_2^2, \cdots, A_P^2\right\}$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\right\} = \mathbf{A}\mathrm{E}\left\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\right\}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}}$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{APA}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}}$$

$$\mathbf{R} = \mathrm{E}\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H\} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{P} A_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sigma_{\mathrm{w}}^2 \mathbf{I},$$

Dar

$$\mathbf{R}_S = \sum_{i=1}^{P} A_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{APA}^H$$

este *matricea de autocorelaţie a semnalului*, iar

$$\mathbf{R}_W = \sigma_w^2 \mathbf{I}$$

este *matricea de autocorelaţie a zgomotului*, deci:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_W$$

Valori proprii, vectori proprii

Vom presupune $N>P$.

Rangul matricei $\mathbf{R}_S$ este P, iar al matricelor $\mathbf{R}_W$ deci şi **R,** este N.

In consecinţă, matricea $\mathbf{R}_S$ are P valori proprii $\lambda_{Si},\ i=1,\cdots,P$ nenule (pozitive), iar restul de N-P sunt nule.

Vectorii proprii $\mathbf{v}_i$ asociaţi valorilor proprii nenule poartă numele de *vectori proprii principali*. În consecinţă, $\mathbf{R}_S$ poate fi exprimat sub forma:

$$\mathbf{R}_S = \sum_{i=1}^{P} \lambda_{Si} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Vectorii $\mathbf{v}_i$ definesc acelaşi *subspaţiu al semnalelor* P-dimensional ca şi vectorii $\mathbf{e}_i$. Într-adevăr, ei sunt ortogonali şi satisfac relaţia:

$$\mathbf{R}_S \mathbf{v}_i = \lambda_{Si} \mathbf{v}_i$$

$$\sum_{k=1}^{P} A_k^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i = \lambda_{Si} \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{P} \frac{A_k^2}{\lambda_{Si}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{P} \left(\frac{A_k^2}{\lambda_{Si}} \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i \right) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{P} \alpha_{ik} \, \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

deci

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{P} \lambda_{Si} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^{P} \left(\lambda_{Si} + \sigma_w^2\right) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=P+1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Din relaţia de mai sus rezultă că se pot împărţi vectorii proprii λ_i ai matricei de autocorelaţie în două categorii

-*vectorii proprii principali*, $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_P$, care corespund valorilor proprii

$$\lambda_i = \lambda_{Si} + \sigma_w^2, \quad i = 1, \cdots, P$$

(cele mai mari); ei sunt în acelaşi timp vectori proprii ai matricei de autocorelaţie

a semnalului; vom spune că aceştia generează *subspaţiul semnal* şi îi vom nota

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \cdots, P$$

Cu aceştia se formează matricea

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_P] \qquad (N \times P)$$

-vectorii proprii $\mathbf{v}_{P+1},\ldots,\mathbf{v}_N$, corespund toţi valorilor proprii $\lambda_{P+1},\lambda_{P+2},\cdots,\lambda_N=\sigma_w^2$; ei generează *subspaţiul zgomot*. Aceşti vectori se vor nota

$$\mathbf{g}_i=\mathbf{v}_{P+i}, \quad i=1,\cdots,N-P$$

şi cu ei se formează matricea

$$\mathbf{G}=\left[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\cdots,\mathbf{g}_{N-P}\right] \quad \left(N\times\left(N-P\right)\right)$$

$$\mathbf{Q} \triangleq [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_N]$$

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{Q\Lambda}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots \lambda_N\} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_P\} \qquad \mathbf{\Lambda}_2 = \mathrm{diag}\{\lambda_{P+1}, \cdots, \lambda_N\}$$

$$\boxed{\mathbf{RQ} = \mathbf{Q\Lambda}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{R}[\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}[\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}]\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{RS} = \mathbf{S\Lambda}_1$$
$$\mathbf{RG} = \mathbf{G\Lambda}_2$$

Din ultima relaţie

$$\mathbf{RG} = \mathbf{G}\begin{bmatrix} \lambda_{P+1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \sigma_w^2 \mathbf{G} = \mathbf{APA}^H\mathbf{G} + \sigma_w^2 \mathbf{G}$$

de unde

$$\mathbf{APA}^H\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

Dar **P** este o matrice diagonală cu elemente nenule pe diagonală, iar **A** este de tip Vandermonde, deci are rangul egal cu numărul de coloane, aşa încât rezultă

$$\mathbf{A}^H \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

ceea ce implică

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_k = 0, \quad \forall i, k, \;\; i = 1, \cdots, P, \;\; k = 1, \cdots, N - P$$

deci

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{G} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \cdots, P$$

Totodată, relaţia de mai sus implică

$$\mathbf{A}^H \mathbf{g}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, \cdots, N - P$$

ceea ce înseamnă că vectorii $\mathbf{g}_k$ aparţin spaţiului nul al matricei $\mathbf{A}^H$:

$$\mathbf{g}_k \in \mathrm{N}\left(\mathbf{A}^H\right)$$

sau spaţiul coloană al matricei $\mathbf{G}$ este identic cu spaţiul nul al matricei $\mathbf{A}^H$:

$$\mathrm{C}(\mathbf{G}) = \mathrm{N}\left(\mathbf{A}^H\right)$$

Dar din ortogonalitatea vectorilor proprii rezultă

$$\mathrm{C}(\mathbf{G}) = \mathrm{N}\left(\mathbf{S}^H\right)$$

Din ultimele două relaţii

$$\mathrm{N}\left(\mathbf{S}^H\right) = \mathrm{N}\left(\mathbf{A}^H\right)$$

În mod asemănător se deduce că

$$\mathrm{C}(\mathbf{S}) = \mathrm{C}(\mathbf{A})$$

În consecinţă vectorii $\mathbf{e}_i$ generează acelaşi subspaţiu ca şi vectorii proprii principali şi sunt ortogonali pe subspaţiul zgomot.

Pornind de la observaţiile de mai sus există două categorii de metode de estimare a frecvenţelor. Unele se bazează pe subspaţiul semnal, celelalte pe subspaţiul zgomot.